

УДК 550.8.013

ОБ УТОЧНЕНИИ ФОРМЫ И ТЕНЗОРА УДЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

© 2025 г. В. Н. Кризский^{1, *}, П. Н. Александров^{2, **}, М. Л. Владов^{3, ***}

¹Институт базового инженерного образования СПГУ, г. Санкт-Петербург, Россия

²Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

³Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

*E-mail: krizsky@rambler.ru

**E-mail: alexandr@igemi.troitsk.ru

***E-mail: vladov_ml@mail.ru

Поступила в редакцию 28.03.2024 г.

После доработки 25.07.2024 г.

Принята к публикации 25.07.2024 г.

На основе решения обратных коэффициентных задач геоэлектрики постоянного тока в линейной постановке излагается способ уточнения формы и алгоритм нахождения компонент тензора удельной электропроводности локального включения, находящегося в кусочно-постоянной среде. Приведено решение обратной задачи постоянного электрического тока для локального трехмерного объекта, характеризующегося тензором удельной электропроводности. Проведено исследование по уточнению формы аномалиеобразующего объекта сложной геометрии. Предложен алгоритм уточнения формы локального анизотропного включения. Проведен анализ вопросов, связанных с применением этой процедуры. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: обратная коэффициентная задачи геоэлектрики, кусочно-постоянные анизотропные среды, форма локального включения, тензор удельной электропроводности.

DOI: 10.31857/S0002333725030068, EDN: FFAYIH

Определение геометрии локальной неоднородности, находящейся в неоднородной среде, представляет актуальную проблему при изучении рудных месторождений, локальных техногенных объектов и при решении многих других геологических задач. Эта задача исследовалась в работах ряда авторов, среди которых А.Н. Тихонов [Тихонов, 1949], В.И. Старостенко [Старостенко и др., 2005], Е.Г. Булах [Булах и др., 2009], В.И. Дмитриев [Дмитриев, 2013], П.С. Мартышко [Мартышко и др., 2015] и др., где применялись различные подходы для определения формы звездных односвязных тел. В настоящей работе рассматриваются объемные интегральные уравнения для решения задачи определения формы и строения неоднородности, при этом требование звездности тела и его односвязности не накладывается. Предложен подход к решению задачи изучения внутренней структуры

локальной неоднородности и способы реализации системы наблюдения для ее решения.

Решение обратной задачи сталкивается с проблемой одновременного определения формы и физических свойств геологических объектов, что приводит к ее некорректности. На первом этапе, посредством истокообразной аппроксимации [Александров, Монахов, 2014], определяется местоположение в проводящем полупространстве локального включения — аномалиеобразующего объекта. Требуется определить его геометрическую форму и физические параметры вещества, наполняющего эту форму, т.е. произвести детальные исследования строения этого объекта. Для задач геоэлектрики на постоянном электрическом токе в кусочно-постоянных анизотропных средах ищут тензор удельной электропроводности и форму включения. Фиксируя значение электропроводности,

можно искать, например, аппроксимирующий границу локального включения сплайн (форму) [Кризский и др., 2004]. При решении этой обратной геофизической задачи следует учитывать, что форма тела и его электропроводность взаимосвязаны. Неоднозначность в решении приводит к возникновению множества эквивалентных с точки зрения решения обратной задачи локальных тел с различными электропроводностями. Инвариантом при таком поиске является лишь некоторая функциональная зависимость, связывающая удельную электропроводность и отражающие его форму объемные характеристики тела.

Это означает, что процесс поиска формы и удельной электропроводности тела нельзя реализовывать последовательно по отдельности (сначала форму, затем электропроводность или, наоборот, сначала электропроводность, а затем — форму). Поиск формы и удельной электропроводности следует вести параллельно, уточняя их поочередно.

В настоящей работе излагается процедура уточнения формы и тензоров удельных электропроводностей подобластей локального анизотропного включения кусочно-постоянной по удельной электропроводности среды по данным измерений поля постоянного электрического тока. За основу процедуры уточнения берется способ решения обратных задач в линейной постановке.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Способ решения обратных задач в линейной постановке [Александров, Кризский, 2022] для задач геоэлектрики постоянного тока основан на решении объемных интегральных уравнений вида:

$$\mathbf{X}(x, y, z) = \iiint G(x', y', z', x, y, z) \Delta S(x', y', z') \times \\ \times \mathbf{X}(x', y', z') dx' dy' dz' + \mathbf{X}^f(x, y, z),$$

где $\mathbf{X}$ — вектор физического поля (вектор электромагнитного поля, вектор упругих полей и т.п.); $\mathbf{X}^f(x, y, z)$ — вектор первичного поля — решение прямой задачи для среды, для которой имеется функция Грина $G(x', y', z', x, y, z)$; $\Delta S(x, y, z) = S(x, y, z) - S^0$, где S^0 — удельная электропроводность вмещающей среды.

В дискретном виде, когда интеграл представляется суммой, получено равенство:

$$\mathbf{X}^p = G_v^p \Delta S \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_p^s, \quad (1)$$

где индексы означают: p — точку наблюдения; s — точку источника; v — точку в неоднородности; ΔS — квадратная матрица электропроводности, имеющая вид:

$$\Delta S = \begin{pmatrix} \Delta \sigma_1 & [0] & \vdots & [0] \\ [0] & \Delta \sigma_2 & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & [0] & \vdots & \Delta \sigma_N \end{pmatrix},$$

где подматрицы $\Delta \sigma_j = \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{11}^j & \Delta \sigma_{12}^j & \Delta \sigma_{13}^j \\ \Delta \sigma_{21}^j & \Delta \sigma_{22}^j & \Delta \sigma_{23}^j \\ \Delta \sigma_{31}^j & \Delta \sigma_{32}^j & \Delta \sigma_{33}^j \end{pmatrix}$ есть

тензоры избыточной электропроводности j -го элемента объема всей неоднородности V , состоящей из N элементов; $\mathbf{X}_p^s$ — первичное поле от источника в точке наблюдения; $\mathbf{X}_v$ — поле в неоднородности; $\mathbf{X}^p$ — поле в точке наблюдения (как разность потенциалов); G_v^p — передаточная матрица от неоднородности в точку наблюдения; размерности $K \cdot 3N$, K — количество точек наблюдения.

Из равенства (1) матрица избыточных электропроводностей объемов может быть получена решением матричного уравнения [Александров, Кризский, 2022]:

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_1^{-1} & [0] & \vdots & [0] \\ [0] & \Delta \sigma_2^{-1} & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & [0] & \vdots & \Delta \sigma_N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2M1} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \vdots & a_{NM} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2M1} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \vdots & b_{NM} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $A = (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) = \{a_{ij}\}$, $B = Y + G_v^v \times (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) = \{b_{ij}\}$.

Теоретически, согласно вышеизложенным формулам, решение обратной геоэлектрической задачи может быть получено путем следующего

линейного алгоритма действий с однократным решением обратной задачи:

- выберем окаймляющие параллелепипеды, включающие в себя локальные неоднородности;
- осуществим разбиение параллелепипедов на элементарные объемы (количеством N штук);
- решая матричное уравнение (2), найдем избыточные электропроводности элементарных объемов $\Delta\sigma_j, j = 1, 2, \dots, N$;
- по формулам $\sigma_j = \Delta\sigma_j + \sigma_0, j = 1, 2, \dots, N$ найдем тензоры удельных электропроводностей всех элементарных объемов;

– отбросив элементарные объемы, у которых тензоры удельных электропроводностей совпадают (достаточно близки) с тензором удельной электропроводности вмещающего пространства, получим приближенную геометрическую форму локальных неоднородностей с точностью до заданного разбиения на элементарные объемы.

Поскольку теоретически разбиение на элементарные объемы можно осуществить сколь угодно маленькими по размеру элементами, то и форму локальных включений можно отыскать достаточно “хорошо”.

Реализуем этот алгоритм на примере локальной неоднородности типа “колодец”. Данная форма модели является трудной для определения физических параметров элементарных объемов, находящихся внутри неоднородности.

Координаты точек $A(A_x, A_y)$ и $B(B_x, B_y)$ AB -пар источников постоянного электрического тока

Номер источника	1	2	3	4	5	6	7	8
$A_x, \text{ м}$	-10	0	10	-15	-15	-10	-10	-10
$A_y, \text{ м}$	-10	-10	-13	0	17	-5	5	-15
$B_x, \text{ м}$	10	0	-14	15	15	10	10	10
$B_y, \text{ м}$	10	10	10	0	-17	-5	5	17

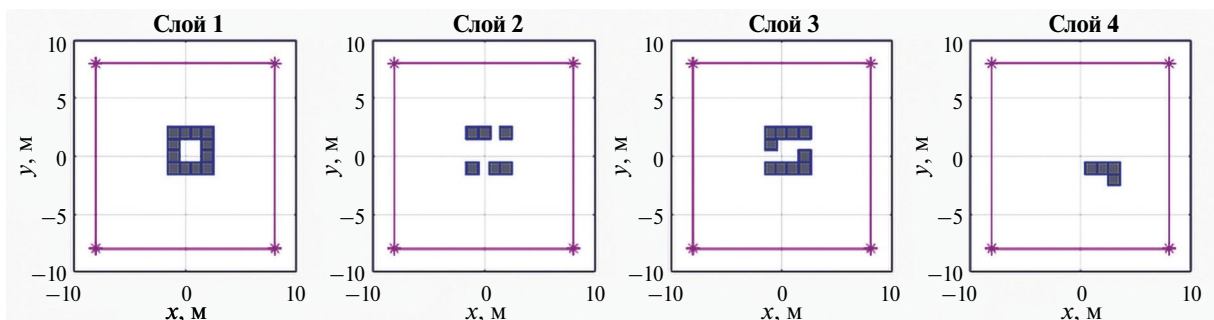


Рис. 1. Расположение кубических объемных дискретных элементов локального включения типа “колодец” по слоям.

Рассмотрим в однородном полупространстве с удельной электропроводностью $\sigma_0 = 0.01 \text{ См/м}$ локальное включение с тензором удельной

$$\text{электропроводности } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.225 & 0.078 & 0.028 \\ 0.078 & 0.152 & 0.038 \\ 0.028 & 0.038 & 0.223 \end{pmatrix}$$

$\text{См/м. Тензор } \sigma_1 \text{ получен из тензора } \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$ путем его поворота на углы 45°

относительно всех осей декартовой системы координат (ось Oz направлена вглубь земли). Локальное включение послойно составлено из дискретных объемных элементов с электропроводностью σ_1 — кубиков стороной 1 м с гранями, параллельными координатным плоскостям системы координат. Центры кубиков первого слоя находятся на глубине 70 см, 2-го слоя — на глубине 1.7 м, 3-го слоя — на глубине 2.7 м и 4-го слоя — на глубине 3.7 м. Послойное расположение объемных элементов показано на рис. 1. Рисунок 1 и все последующие рисунки локальных включений изображены для наблюдателя, находящегося ниже локального объекта.

На “дневной” поверхности — поверхности “земля/воздух” ($z = 0$) — размещены 8 дипольных AB -пар источников постоянного электрического тока силой 1 ампер. Координаты точек $A(A_x, A_y)$ и $B(B_x, B_y)$ заданы таблицей значений (таблица).

Квадратная сетка узлов, сформированная на площадке “дневной” поверхности $[-8.0 \text{ м}; 8.0 \text{ м}] \times [-8.0 \text{ м}; 8.0 \text{ м}]$ с шагом 0.25 м, определяет центры пар приемников поля. Пара M_1N_1 имеет смещение $\pm 1 \text{ м}$ по оси 0х относительно узла сетки, а пара M_2N_2 смещена на $\pm 1 \text{ м}$ по оси 0у. Контуры сетки узлов обозначены на последующих рисунках розовым квадратом.

Для всех дипольных источников были вычислены (“измерены”) разности потенциалов dF_x на парах M_1N_1 и dF_y — на парах M_2N_2 , как решение прямой задачи на основе объемных интегральных уравнений [Александров, Кризский, 2022]. На рис. 2 показаны потенциалы dF_x и dF_y для каждой АВ-пары источников.

Окаймляющий локальное включение параллелепипед (верхний ряд на рис. 3) состоит из $6 \times 6 \times 4 = 144$ блоков. В каждом блоке с помощью алгоритма решения обратной задачи вычислялся тензор удельной электропроводности ($3 \times 3 = 9$ компонент). Всего искомым элементов в обратной задаче — 1296. Введем обозначения относительных погрешностей приближенных решений $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ обратной задачи:

$$\delta_0^0 = \frac{\|\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0\|}{\|\sigma_0\|} \cdot 100\%, \delta_1^0 = \frac{\|\tilde{\sigma}_1 - \sigma_0\|}{\|\sigma_0\|} \cdot 100\%,$$

$$\delta_1^1 = \frac{\|\tilde{\sigma}_1 - \sigma_1\|}{\|\sigma_1\|} \cdot 100\%,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы. На рисунках нижнего ряда (см. рис. 4) показаны относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 решений $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, найденные относительно удельной электропроводности вмещающего пространства σ_0 .

Как следует из анализа рис. 3, форма включения верно определяется лишь для слоя 1. Для остальных слоев распознать форму локального включения не удастся.

На рис. 4 показаны относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 найденных тензоров $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ удельной электропроводности относительно исходно заданных значений дискретных блоков.

По рис. 4 видно, что однократное решение обратной задачи плохо определяет удельную электропроводность — даже на первом слое существуют блоки, для которых относительная погрешность превышает 100%.

Вычислительный эксперимент показывает, что алгоритм, использующий однократное решение обратной задачи, не дает возможности определить форму и удельную электропроводность дискретных блоков локального включения типа “колодец”.

Основными причинами такого результата, по мнению авторов, являются:

1) существенное убывание электрического поля с расстоянием и, как следствие, ухудшение определения тензора удельной электропроводности с глубиной;

2) плохая обусловленность формируемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и, как результат, неустойчивость получаемых решений;

3) “нефизичность” получаемых решений СЛАУ для некоторых дискретных блоков, выражающаяся в несимметричности тензора удельной электропроводности и/или отрицательности его диагональных элементов.

Проанализируем причины.

В пункте 1 убывание электрического, как и любого другого физического поля, привносит в решение задачи неустранимые погрешности. Это означает, что с увеличением расстояния объекта от источников и приемников измерительной установки, распознавание формы и удельной электропроводности локального объекта неизбежно будет ухудшаться. На глубинах, где отраженный от блоков локального включения сигнал не будет распознаваем в силу порога чувствительности измерительных датчиков приемников поля, параметры включения определены быть не могут. Затухание первичного поля и его слабый, затухающий сигнал отклика от локального включения могут приводить к неоднозначности решения обратной задачи, когда одно и то же аномальное поле может являться откликом от двух сильно различающихся по физическим свойствам объектов. Два или несколько соседних дискретных блоков, достаточно удаленных от источника и приемника поля, например, могут “обмениваться” своими физическими свойствами при решении обратной задачи, сохраняя при этом совокупный интегральный вклад в аномальное поле объекта.

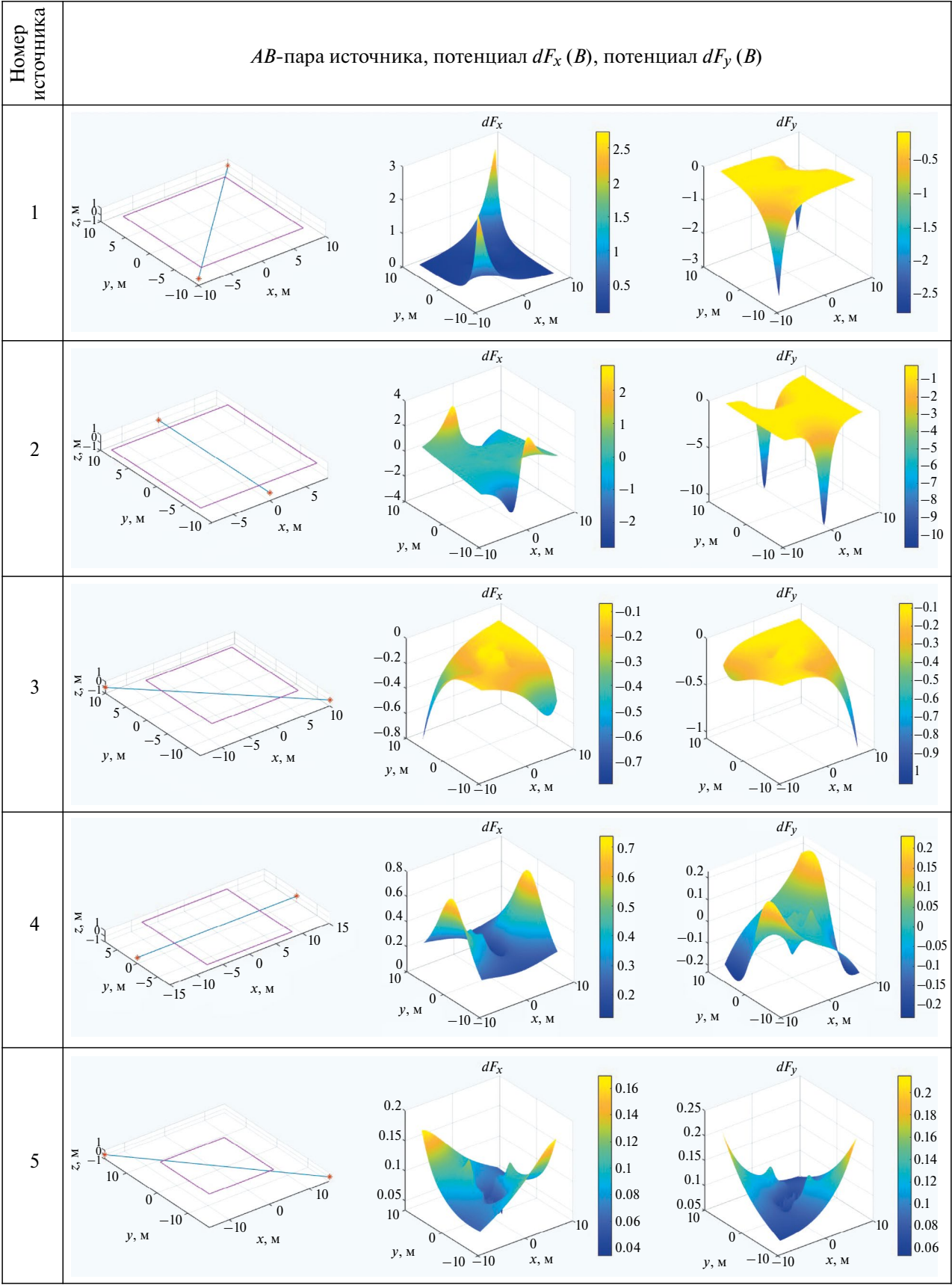


Рис. 2. *AB*-пары источников электрического поля, потенциалы $dF_x(B)$ и $dF_y(B)$.

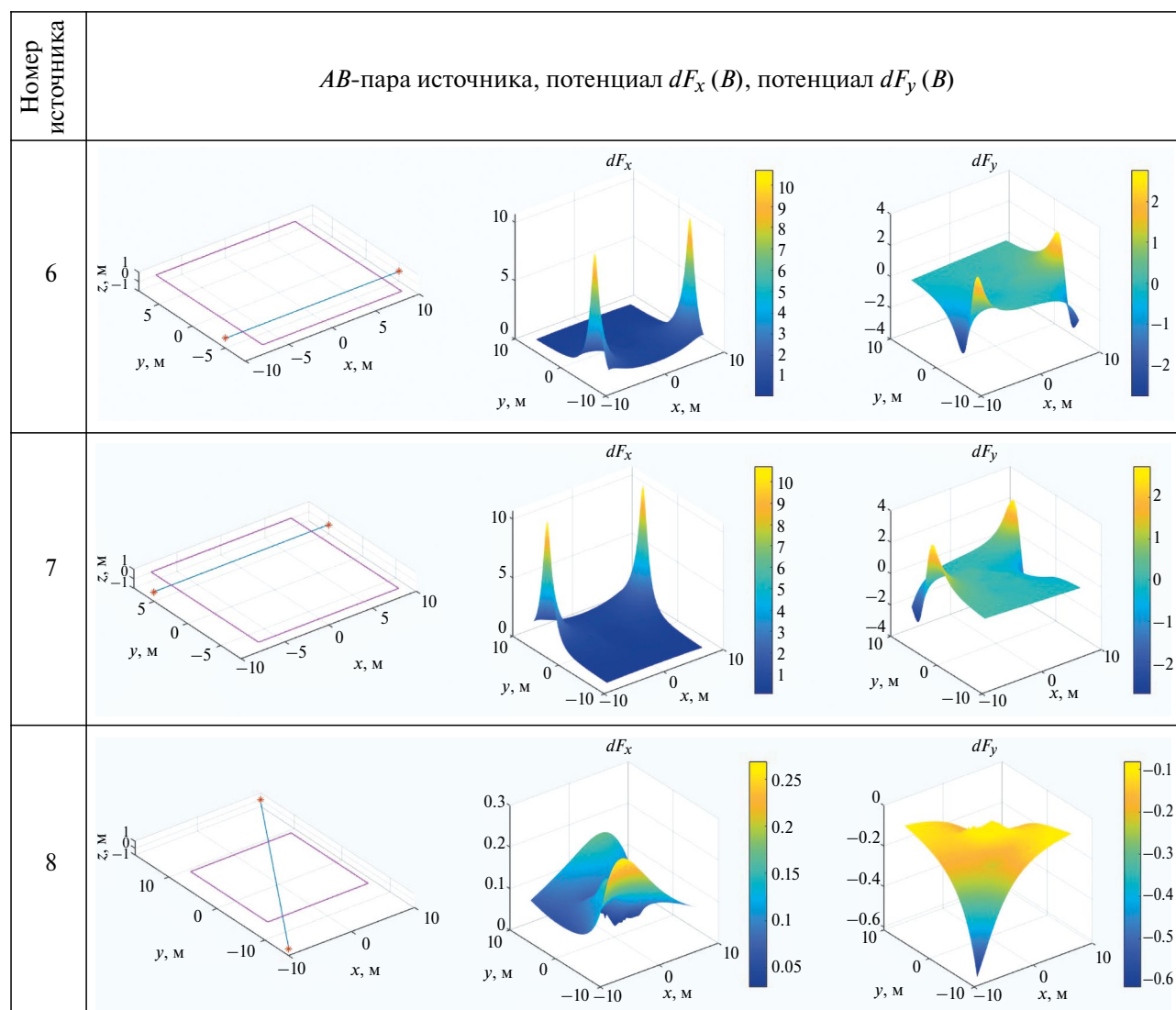


Рис. 2. (Продолжение). *AB*-пары источников электрического поля, потенциалы $dF_x(B)$ и $dF_y(B)$.

В п. 2 следует отметить наличие взаимосвязи между числом обусловленности матрицы СЛАУ, устойчивостью, точностью решения обратной задачи, количеством блоков, используемых для дискретизации области локального включения и размерностью решаемой обратной задачи. Уменьшение количества дискретных блоков уменьшает размерность решаемой обратной задачи и, в целом, понижает число обусловленности СЛАУ. Все это ведет к росту устойчивости и повышению точности решения обратной задачи по определению тензоров удельной электропроводности.

Для устранения в п. 3. асимметричности тензора удельной электропроводности систему линейных алгебраических уравнений следует до-

полнить равенствами вида $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$ для недиагональных элементов тензора. Условие неотрицательности диагональных элементов можно учесть, трансформируя задачу поиска решения СЛАУ в задачу линейного программирования, где решаемая система становится системой ограничений задачи линейного программирования, которая дополняется условиями неотрицательности для диагональных элементов тензора электропроводности $\sigma^{ii} \geq 0$, а минимизируемая целевая линейная функция задачи имеет вид $\Psi = \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33}$. При решении таких задач линейного программирования с применением стандартных подпрограмм математических пакетов могут возникнуть ситуации

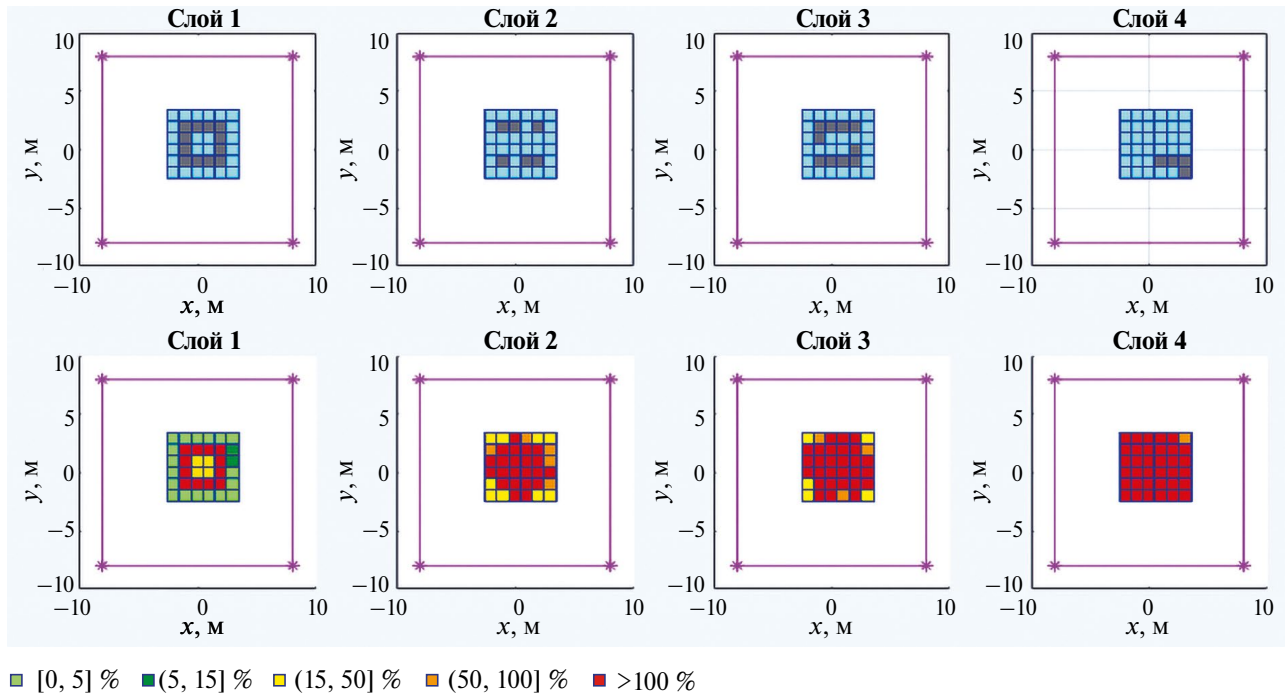


Рис. 3. Окаймляющий локальное включение параллелепипед (верхний ряд), относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 (относительно удельной электропроводности вмещающего пространства) решений обратной задачи (нижний ряд).

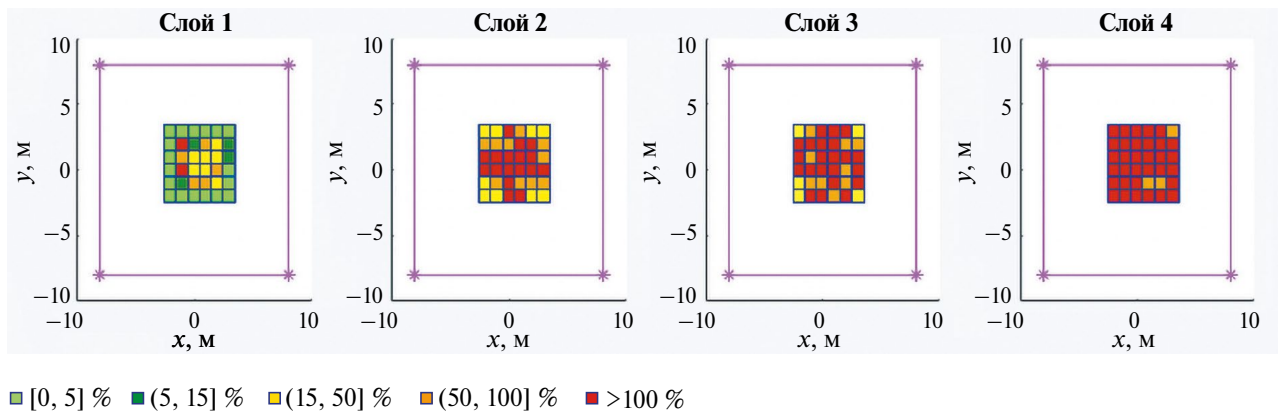


Рис. 4. Относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 (относительно удельной электропроводности вмещающего пространства) решений обратной задачи.

отсутствия решений в силу пустоты области допустимых решений или в силу неограниченности целевой функции [Данциг, 1966]. В таких случаях диагональные элементы матрицы удельной электропроводности, полученные путем решения СЛАУ, в нашем алгоритме полагались равными нулю.

Отметим, что основными числовыми характеристиками, которые могут быть получены по результатам решения обратных задач и которые могут служить характеристиками для принятия решений, являются только относительные

погрешности δ_i^0 ($i = 0, 1$) блоков дискретного разбиения окаймляющей области локального включения, вычисленные относительно удельной электропроводности вмещающей среды.

Рассмотрим распределение относительных погрешностей δ_0^0 и δ_1^0 по слоям для тела “колодец” (см. рис. 5), показанных на рис. 3 в нижнем ряду.

На первом слое, по шкале процентных значений относительных погрешностей, наблюдается четкое разделение блоков на две группы: первая

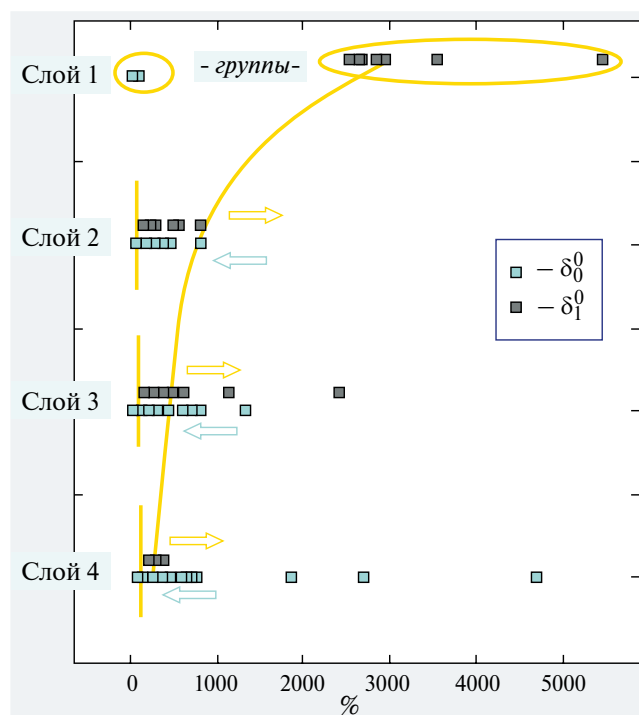


Рис. 5. Относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 решений обратной задачи.

объединяет блоки вмещающего пространства (голубые), вторая — блоки включения (серые). Это разделение блоков на группы позволяет (см. множество красных блоков для слоя 1 в нижнем ряду рис. 3) четко видеть форму локального включения на первом глубинном слое. Средние значения относительных погрешностей для этих групп составили 8.12% и 2976.02%, что соответствует попаданию норм тензоров удельных электропроводностей в интервалы $0 \leq \|\sigma_0\| \leq 0.011$ и $0.28 \leq \|\sigma_1\| \leq 0.3$. Тренд средних значений блоков локального включения обозначен на рис. 5 кривой линией. Сравнение с заданными в эксперименте значениями норм тензоров проводимостей блоков ($\|\sigma_0\| = 0.01$, $\|\sigma_1\| = 0.3$) позволяет констатировать, что такая оценка, производимая на первом слое, может быть использована в задачах практической геоэлектрики.

В остальных слоях группы блоков по процентной шкале перемешаны. В каждом из слоев 2–4 видно, что слева в общей группе имеются блоки вмещающего пространства (голубые квадраты, левее вертикальных линий), которые можно отсечь при поиске формы локального включения, уменьшив, таким образом, размерность решаемой обратной задачи и, следовательно, уточнив

ее решение. В этом и заключается основная идея подхода к решению задачи по уточнению геометрии неоднородности.

Отметим, что уточнение решения на каждом слое сдвигает блоки вмещающего пространства (голубые) *влево* к значению относительной погрешности $\delta_0^0 = 0\%$, а блоки локального включения (серые) — *вправо*, в нашем примере к значению $\delta_1^0 = 2900\%$. На рис. 5 направления сдвига показаны стрелками. Разнонаправленное смещение групп блоков дает возможность отделения одной группы блоков от другой с последующим определением формы локального включения и на нижних слоях.

АЛГОРИТМ УТОЧНЕНИЯ ФОРМЫ ТЕЛА И ТЕНЗОРА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ЛОКАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

*В каждом куске мрамора я вижу статую...
Мне остается только отсечь грубые стены...
Микеланджело Буонаротти (1475–1564)
Я беру глыбу мрамора и отсекаю от нее все лишнее.*

Огюст Роден (1840–1917)

Произведенный выше анализ относительных погрешностей δ_0^0 и δ_1^0 позволяет сформулировать основную идею алгоритма поиска формы локальной неоднородности — отсечь лишние блоки. Действие заключается в поэтапном удалении граничных дискретных блоков тела, окаймляющего локальное включение, которые при решении обратной задачи можно классифицировать как “элементы вмещающей среды” (т.е. у которых тензор удельной электропроводности будет “близок” к тензору удельной электропроводности вмещающей среды, а относительная погрешность решения обратной задачи будет “близкой” к нулю). Работу такого алгоритма можно сравнить с работой скульптора, высекающего скульптуру из цельного куска мрамора, что и отражено в эпиграфе к данному разделу.

Алгоритм описывается следующей блок-схемой (см. рис. 6).

Как следует из вышеизложенного, размерность решаемой обратной задачи на каждом шаге цикла будет уменьшаться, что обеспечивает выполнение для алгоритма свойства конечности.

Отметим, что в гравиметрии имеют место аддитивные алгоритмы построения аномального

тела [Балк, Долгаль, 2020], основная суть которых в действии обратном — а именно, дополнить локальную неоднородность граничным дискретным блоком так, чтобы гравитационное поле объекта приближалось к измеренному полю.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Продemonстрируем работу описанного на рис. 6 алгоритма.

Пример 1. На рис. 7 — рис. 11 показаны результаты работы алгоритма для выше описанного тела “колодец” на некоторых итерациях.

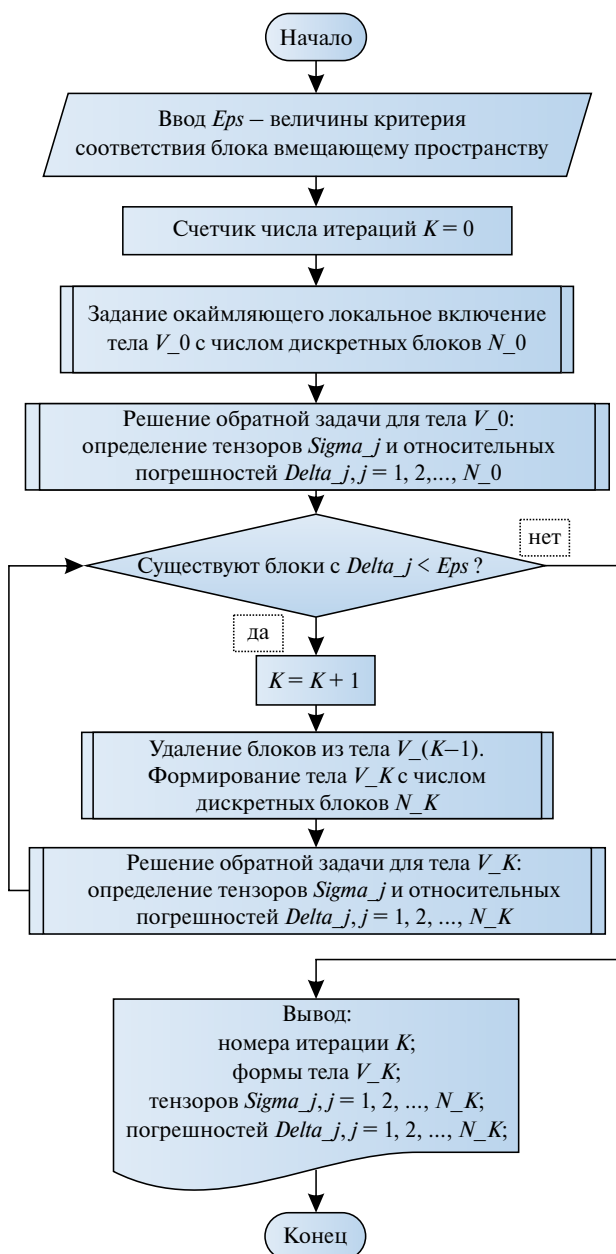


Рис. 6. Блок-схема алгоритма

На рис. 7 — рис. 11 в строках (а) послойно представлен вид окаймляющего локальное включение дискретного тела; строки (б) отображают относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 блоков, полученные решением обратной линейной задачи. По относительным погрешностям δ_0^0 и δ_1^0 определяется, какие из блоков классифицируются как элементы вмещающей среды и будут удалены из дискретного тела. Удаляемые на итерационном шаге блоки показаны черным цветом. Алгоритм адаптивно уменьшает количество удаляемых блоков с глубиной исследуемых слоев, что уменьшает риски появления ошибок. На рис. 7 — рис. 11 строки (в) приведены для наглядности. Они демонстрируют относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 полученных блоков и показывают качество решаемых обратных задач на итерационном шаге алгоритма.

В данном эксперименте форма заданного изначально локального включения определялась точно. Попарное сравнение строк (в) рис. 7 — рис. 11 показывает динамику улучшения качества определяемых тензоров удельной электропроводности с ростом номера итерации.

Строка (в) рис. 11 демонстрирует итоговое качество определения тензоров удельных электропроводностей блоков локального включения. Здесь видно, что относительная погрешность найденных решением обратной задачи тензоров удельной электропроводности с глубиной слоя растет, т.е. качество найденных решений с глубиной снижается.

Пример 2. При уменьшении контрастности локального включения (при

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix} \text{ форма локального вклю-}$$

чения в слое 4, как показано на последней итерации 31 рис. 12, определяется неточно. Послойно сравнивая строки (в) на рис. 11 и рис. 12, можно отметить, что качество определения тензора удельной электропроводности также становится хуже.

Т.е., для слабоконтрастных сред решение обратной задачи ухудшается.

Пример 3. Проведем вычислительный эксперимент для случая локального включения типа “колодец” с тензором удельной электропровод-

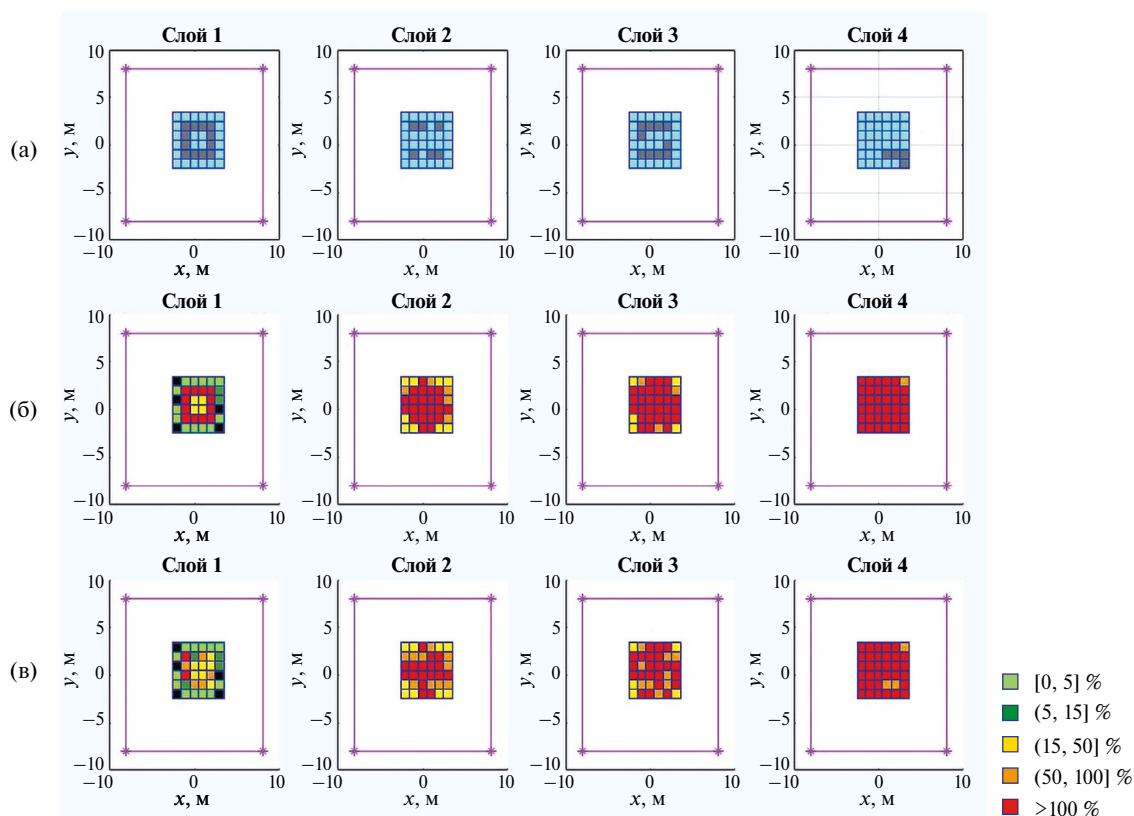


Рис. 7. Итерация 1: (а) — окаямляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 . Черными квадратиками показаны удаляемые граничные дискретные блоки.

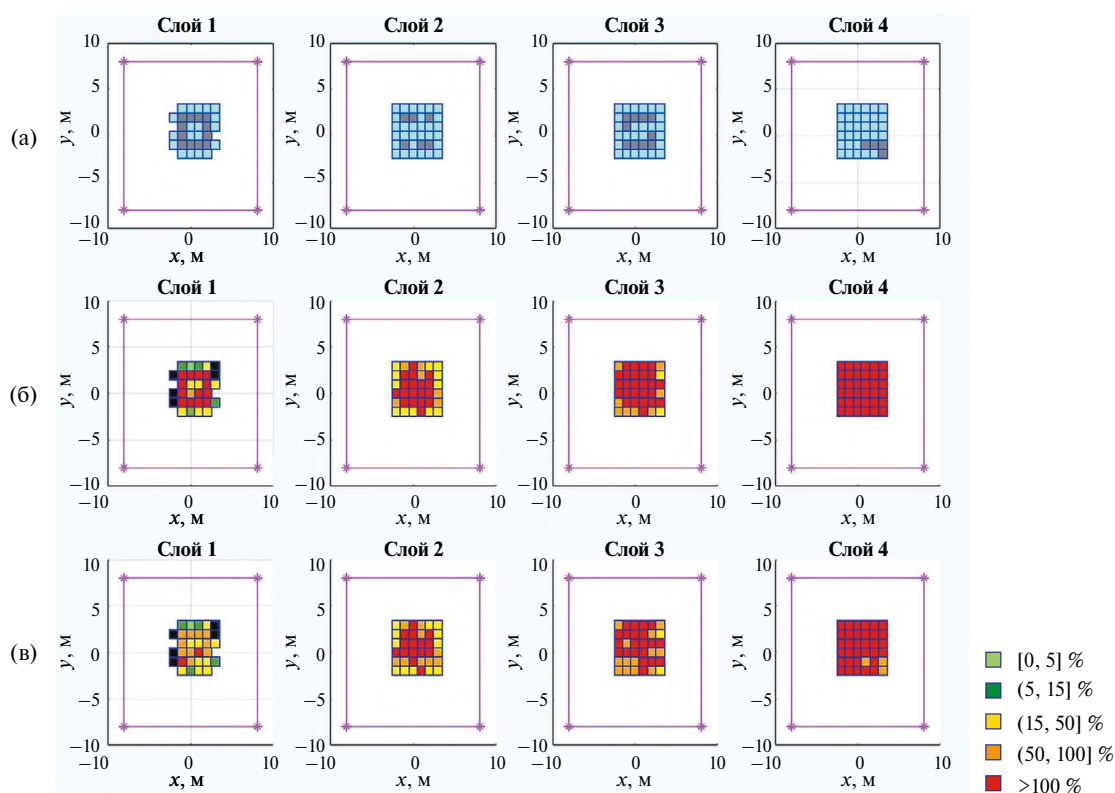


Рис. 8. Итерация 2: (а) — окаямляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 .

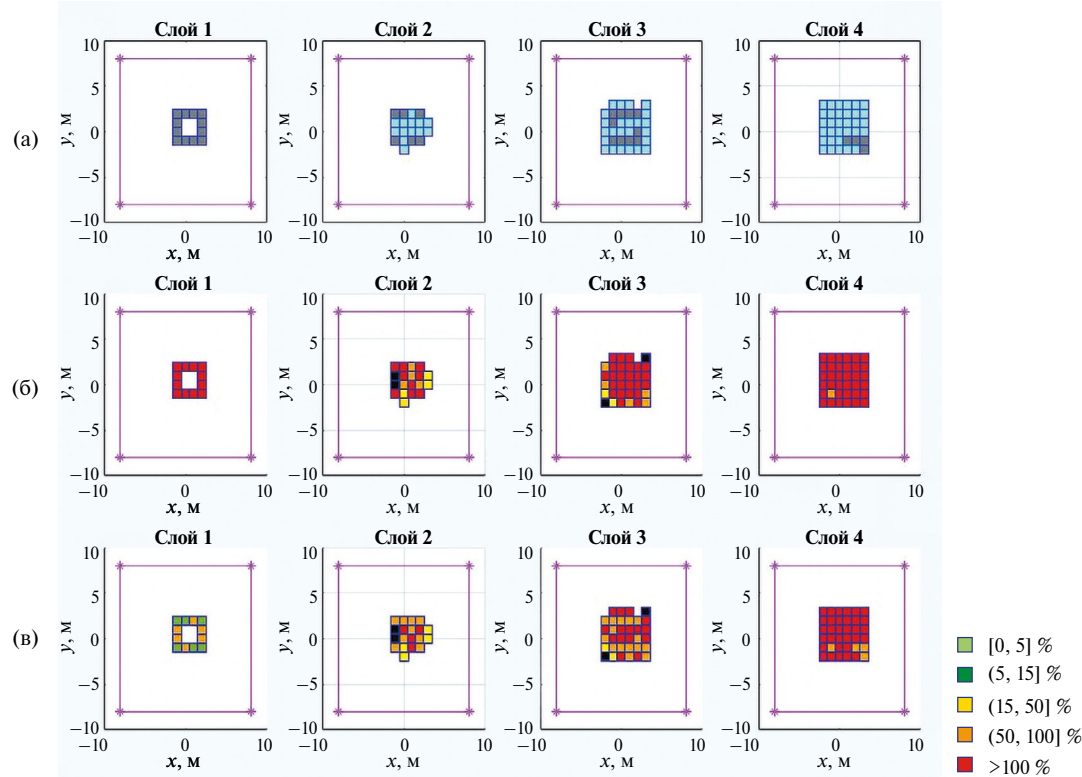


Рис. 9. Итерация 10: (а) — окаймляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^1 и δ_1^1 .

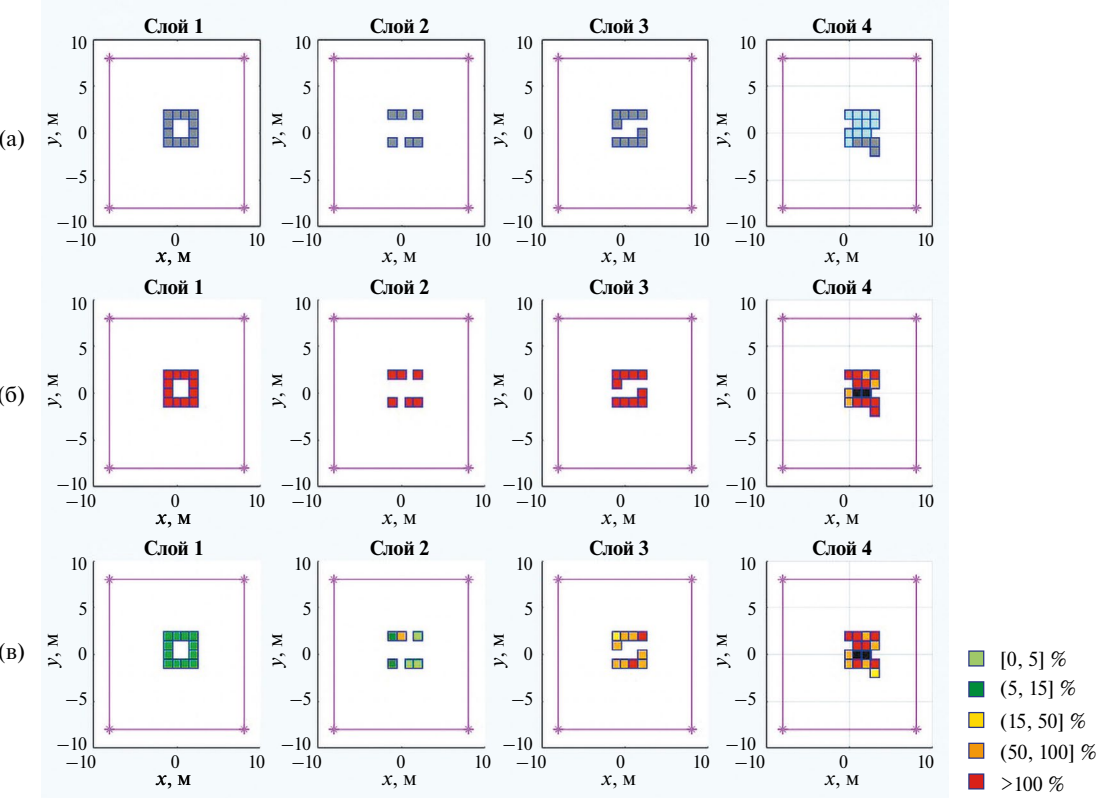


Рис. 10. Итерация 30: (а) — окаймляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^1 и δ_1^1 .

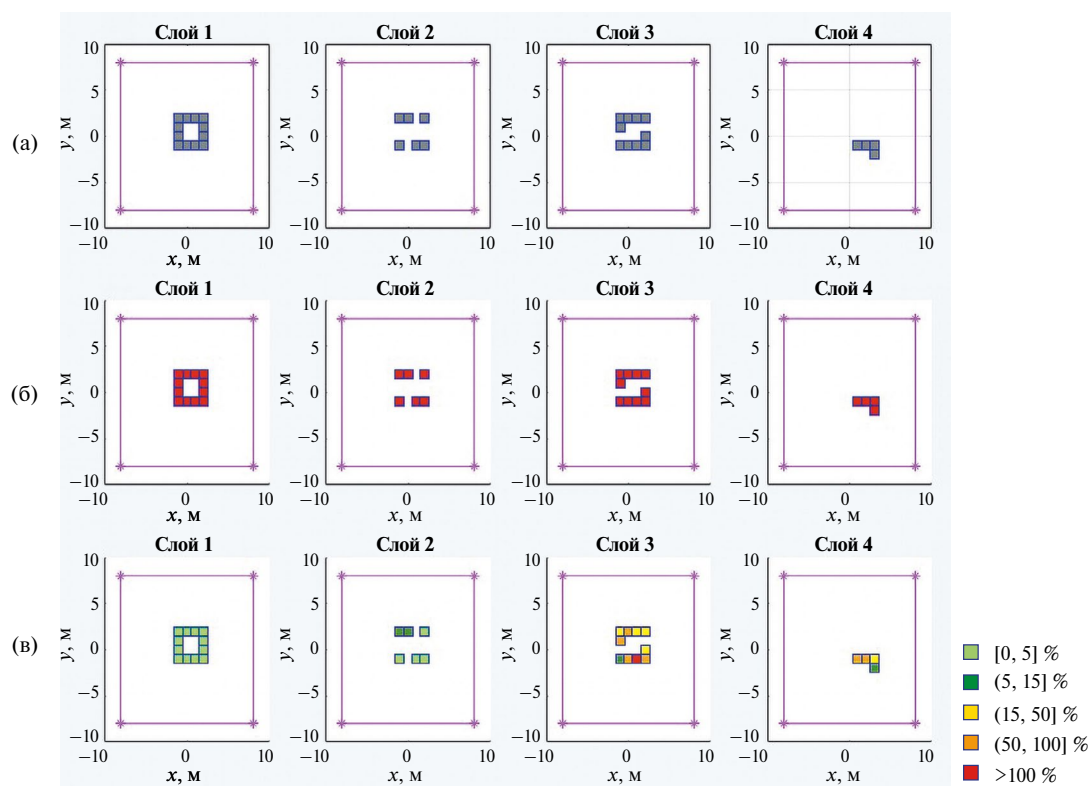


Рис. 11. Итерация 36 (последняя): (а) — окаймляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 ; (в) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 .

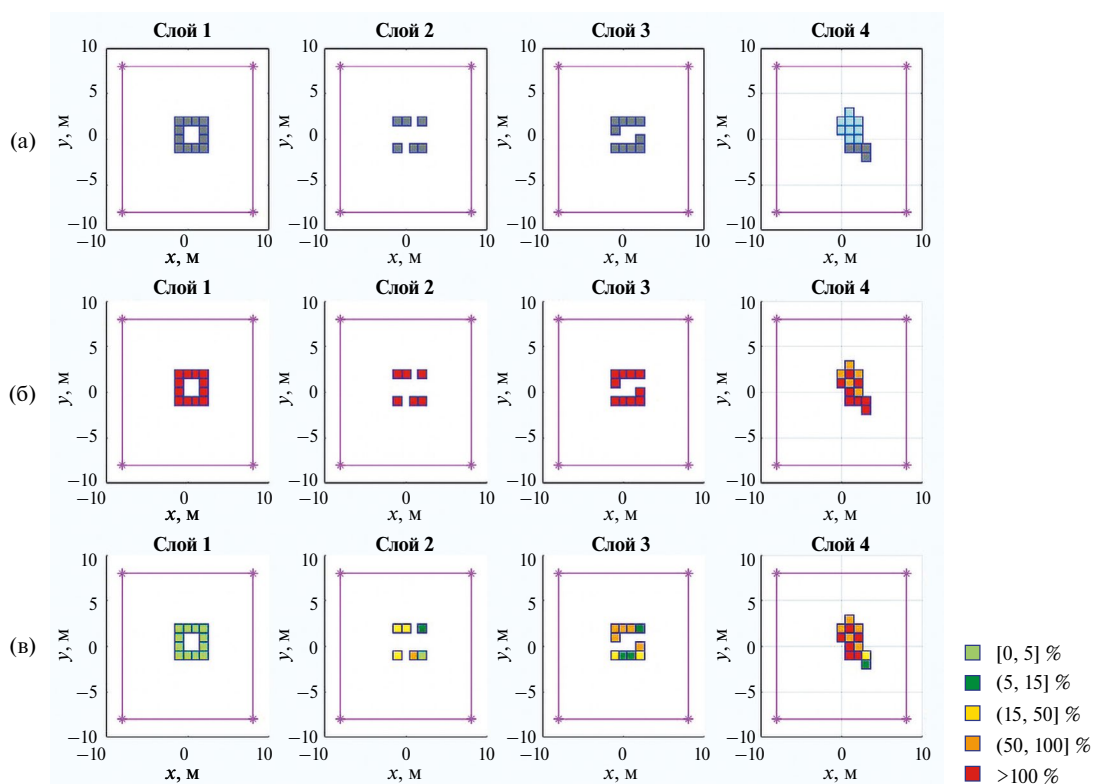


Рис. 12. Итерация 31 (последняя): (а) — окаймляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 ; (в) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 .

$$\text{ности } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.225 & 0.078 & 0.028 \\ 0.078 & 0.152 & 0.038 \\ 0.028 & 0.038 & 0.223 \end{pmatrix} \text{ См/м с добав-}$$

лением блоков менее контрастного вещества
удельной электропроводности

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0.07 \end{pmatrix} \text{ См/м. Послойный вид}$$

кубических блоков включения приведен на рис. 13. Система наблюдения здесь такая же, как и в предыдущих примерах.

На рис.14 — рис. 15 показаны состояния на первом и последнем (29-м) итерационном шаге алгоритма.

Здесь форма локальных включений верно определилась только на 1-м и 2-м слоях. В слое 3 блоки внутри включения, состоящие из вещества вмещающего пространства, не иден-

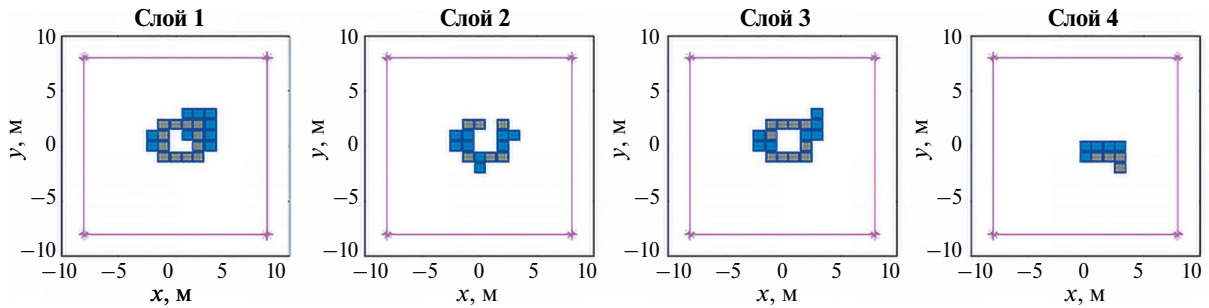


Рис. 13. Форма локальной неоднородности. Кубики серого цвета — неоднородность 1, кубики синего цвета — неоднородность 2.

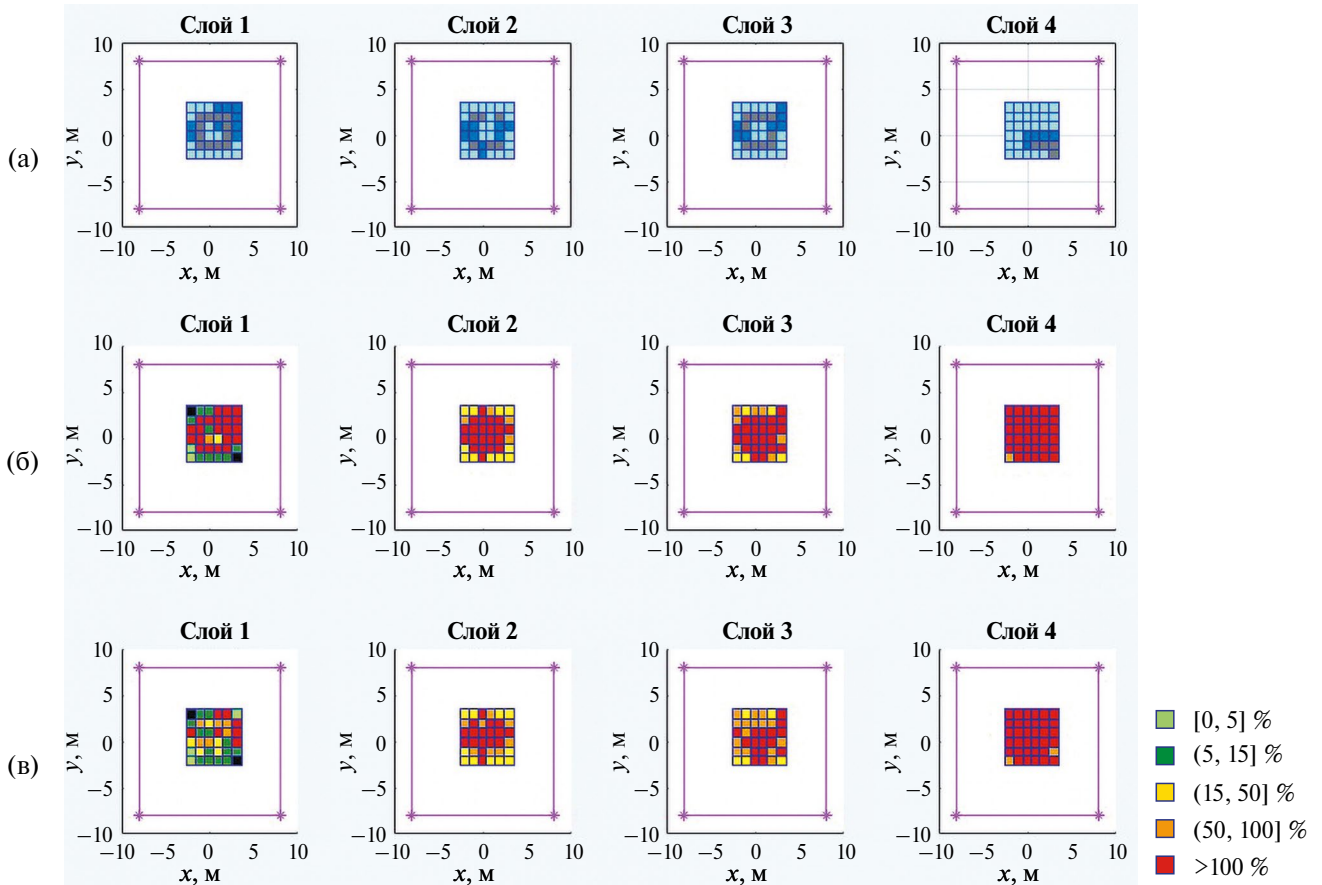


Рис. 14. Итерация 1: (а) — окаямляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^1 и δ_1^1 .

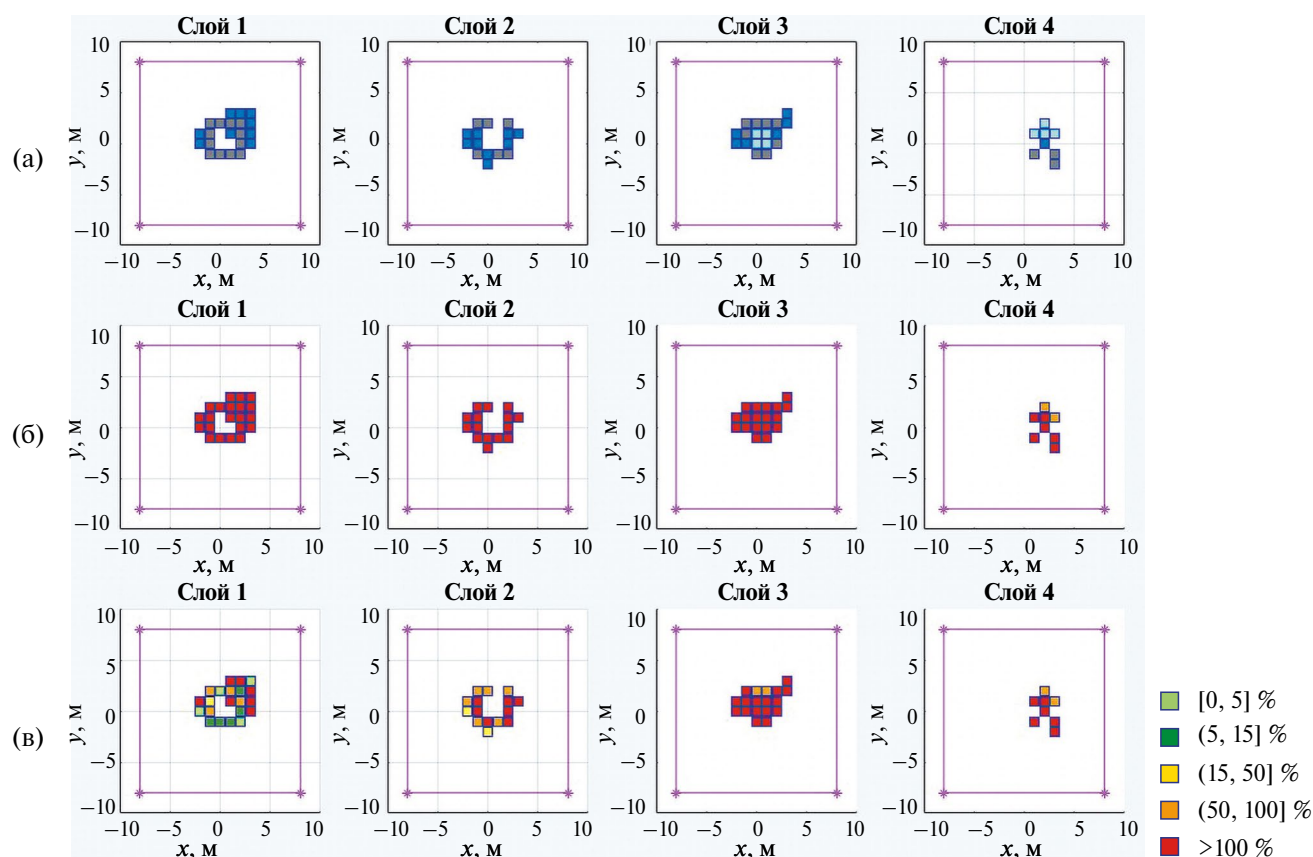


Рис. 15. Итерация 29 (последняя): (а) — окаймляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 .

тифицировались, внешний контур включения соответствует начально заданному. В слое 4 форма тела определена алгоритмом некорректно. Удельная электропроводность включений некорректно определяется уже на первом слое. Более детальный анализ в данном случае показал “обмен” электропроводностями соседних блоков, что демонстрирует неоднозначную разрешимость линейной обратной задачи.

Пример 4. Рассмотрим еще один случай локального включения — погребенный колодец с неразрушенными стенками и с днищем (рис. 16). Будем использовать ту же систему источников—приемников тока на поверхности земли, как и в предыдущих вычислительных экспериментах.

На рис. 17 показан окончательный результат работы алгоритма. Видно, что в слоях 3 и 4 форма включения определилась не точно. Относительная погрешность определения тензора удельной электропроводности на слоях 2–4 превышает 50%.

Улучшение определения формы и тензора удельной электропроводности может быть получено путем “подсветки” локального включения вертикальным диполем, т.е. добавлением AB -пары источников с заглублением одного из электродов, имитирующего скважинный вариант электроразведки постоянным током. Вычислительные эксперименты с вариацией глубины “скважины” от 1 до 20 м с шагом в 1 м показали, что глубины в 1–2 м недостаточны для верного определения формы. При глубинах от 3 до 20 м форма тела определялась верно. На рис. 18 приведена дополнительная вертикальная AB -пара источников и разности потенциалов поля на площадке приемников.

Здесь координаты источников имеют следующие значения: $(Ax, Ay, Az) = (5.5, 0.0, 0.2)$ м, $(Bx, By, Bz) = (5.5, 0.0, 3.0)$ м. Сила тока источника — 1 ампер.

Результат работы алгоритма показан на рис. 19.

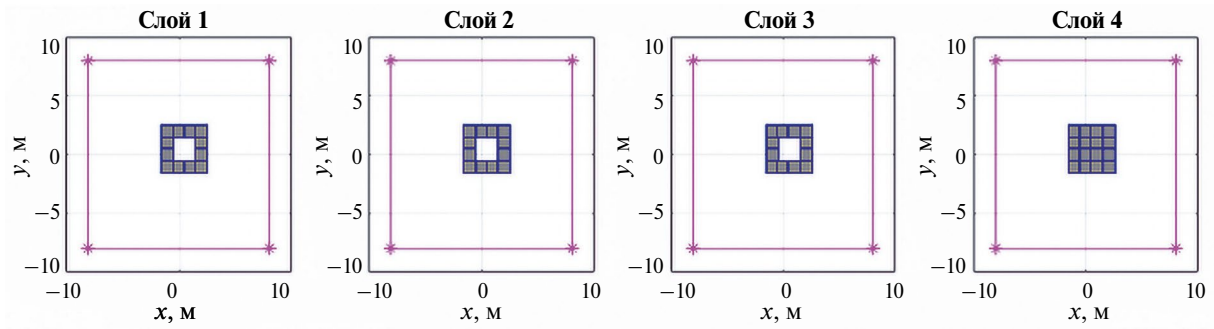


Рис. 16. Форма локальной неоднородности “колодец с днищем”.

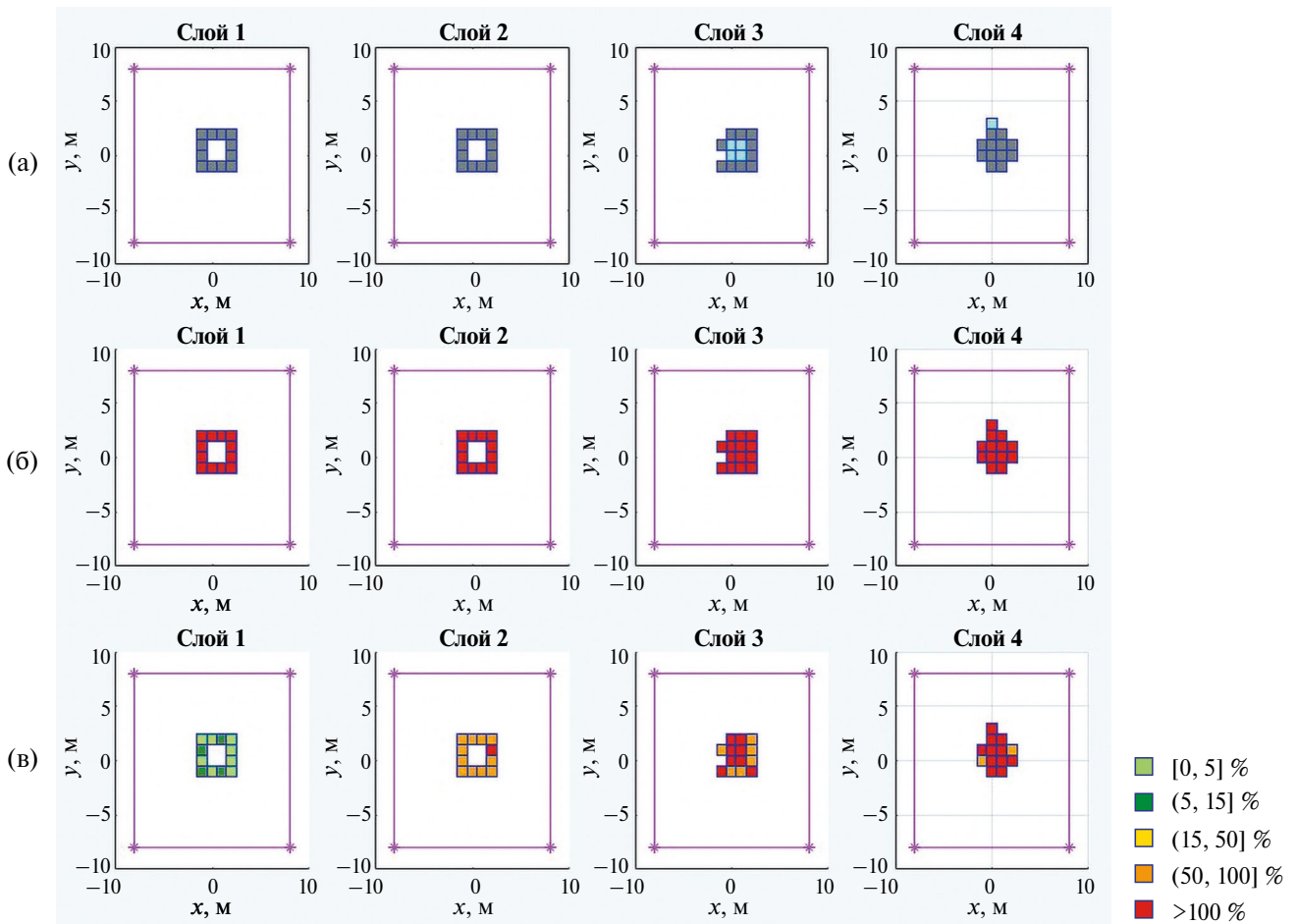


Рис. 17. Итерация 34 (последняя): (а) — окаямляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^1 и δ_1^1 .

Имеет место улучшение определения тензоров удельной электропроводности дискретных блоков, по сравнению с наземным вариантом электроразведки (см. строки (в) на рис. 17 и рис. 19).

В вычислительных экспериментах возможно возникновение двух типов ошибок (см. рис. 20):

1-й тип — удаление блока, принадлежащего локальному включению;

2-й тип — неудаление блока, принадлежащего вмещающему пространству.

Любая из этих ошибок приводит к искажению формы искомого объекта. Ошибка влечет перераспределение электропроводности внутри

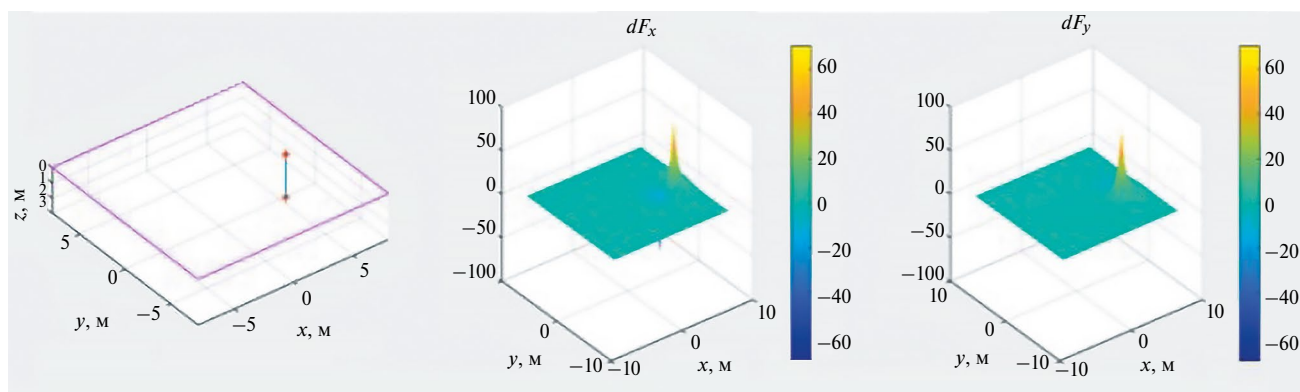


Рис. 18. Вертикальная AB -пара источников электрического поля, потенциалы $dF_x(B)$ и $dF_y(B)$ на площадке приемников.

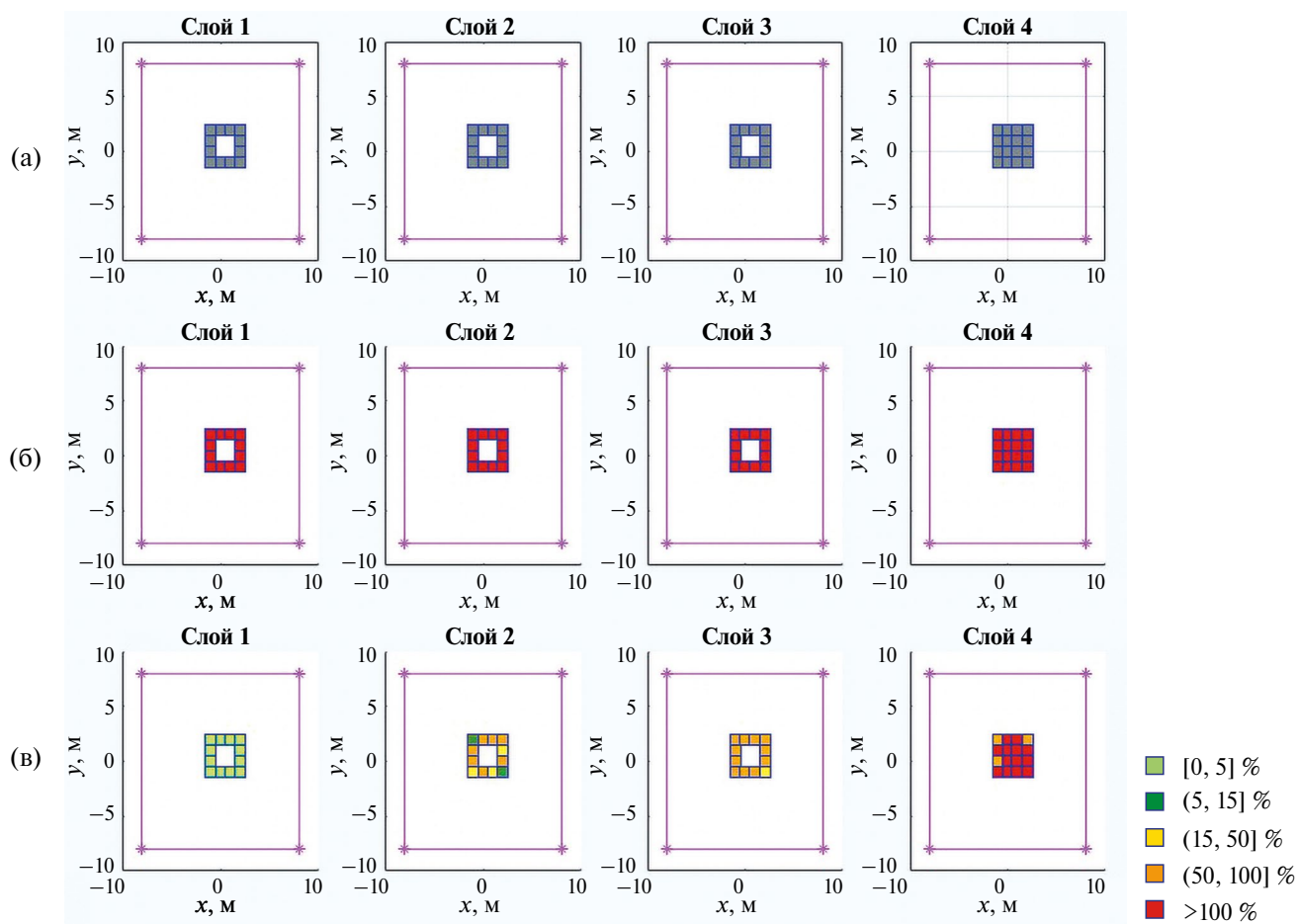


Рис. 19. Итерация 33 (последняя): (а) — окаймляющее тело; (б) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^0 ; (в) — относительные погрешности δ_0^0 и δ_1^1 .

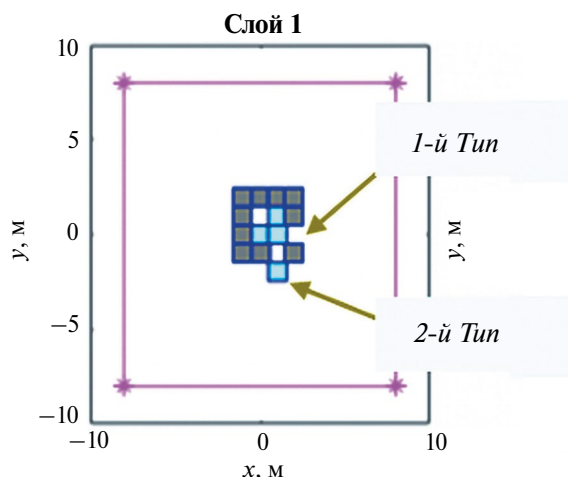


Рис. 20. Два типа возникающих ошибок.

оставшихся блоков и отрицательно влияет на результаты последующих итерационных шагов и на итоговый результат алгоритма в целом, что является предметом дальнейших исследований.

ВЫВОДЫ

Проведенные в работе исследования демонстрируют возможность уточнения формы локального включения и тензора удельной электропроводности применением процедуры решения обратной задачи геоэлектрики постоянного тока в линейной постановке. Для уточнения следует многократно проводить решение обратной задачи, определяя граничные дискретные блоки окаймляющего тела, которые с некоторой заданной степенью точности можно интерпретировать как блоки вмещающего пространства и исключать их рассмотрение на последующем итерационном шаге алгоритма.

Вычислительные эксперименты показывают, что для определения структуры локальной неоднородности и распределения в ней электрофизических параметров не всегда достаточно измерений поля лишь на дневной поверхности. Для решения такой задачи необходимо заглубление источников, что на практике требует бурения скважин.

Алгоритм можно применить для других кусочно-постоянных по электропроводности вмещающих пространств, например, для горизонтально-слоистых. Для этого, для отбрасывания блока, достаточно делать сравнение найденного тензора удельной электропроводности

дискретного блока с тензором удельной электропроводности той подобласти вмещающего пространства, в которой он находится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Александров П.Н., Кризский В.Н. Решение линейной коэффициентной обратной задачи геофизики на основе интегральных уравнений // *Физика Земли*. 2022. Т. 68. №2. С. 136–143. DOI:10.31857/S0002333722020016

Александров П.Н., Монахов С.Ю. Истокообразная аппроксимация в трехмерных обратных задачах электроразведки // *Недра Поволжья и Прикаспия*. 2014. Вып. 80. С. 35–45. ISSN 1997-8316. EDN: UUNHGW

Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные методы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. М.: Научный мир. 2020. 456 с. EDN: HOSFEP

Булах Е.Г., Маркова М.Н., Лапина Е.П. Прямая и обратная задачи магнитометрии для совокупности трехмерных звездных тел класса А.Н.Тихонова // *Физика Земли*. 2009. № 2. С. 88–96. EDN: JVSHAT. (Bulakh E.G., Markova M.N., Lapina E.P. Forward and inverse magnetic problems for models composed of 3D star-shaped Tychonoff class bodies // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2009. V. 45. № 2. P. 171–178).

Данциг Дж. Линейное программирование его обобщения и применения. М.: Прогресс, 1966. 602 с.

Дмитриев В.И. Прямые и обратные задачи электромагнитного зондирования трехмерной неоднородной среды // *Физика Земли*. 2013. № 3. С. 46–51. EDN: PYSGLP. (Dmitriev V.I. Direct and inverse problems in electromagnetic sounding of three-dimensional heterogeneous medium // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2013. V. 49. № 3. P. 344–349).

Кризский В.Н., Иванов В.Т., Герасимов И.А., Викторov С.В. Определение границы тела вращения в горизонтально-слоистых средах методами геоэлектроразведки // *Физика Земли*. 2004. № 9. С. 86–94. EDN: OXKCYL. (Krizskii V.N., Gerasimov I.A., Viktorov S.V., Ivanov V.T. Localization of a body revolution in a horizontally layered medium by geoelectric survey methods // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2004. V. 40. № 9. P. 777–785).

Мартышко П.С., Мартышко М.П. Уравнения трехмерных обратных задач магниторазведки и алгоритм их решения в классе звездных тел // *Уральский геофизический вестник*. 2015. № 2 (26). С. 50–53. EDN: VHZZFV

Старостенко В.И., Завойский В.Н., Легостаева О.В. Прямая задача магнитометрии для трехмерных тел сложной формы с анизотропной магнитной восприимчивостью // *Физика Земли*. 2005. № 7. С. 81–90. EDN: HSBXGT. (Starostenko V.I., Zavoisky V.N., Legostaeva O.V. The forward problem of magnetic survey for 3-D bodies of complex configuration with anisotropic magnetic susceptibility // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2005. V. 41. № 7. P. 585–593.).

Тихонов А.Н. О единственности решения задачи электроразведки // *Докл. АН СССР*. 1949. Т. 69. № 6. С. 797.

On Refining the Form and Tensor of Electrical Conductivity of Local Inhomogeneity

V. N. Krizskiy^{a, *}, P. N. Aleksandrov^{b, **}, and M. L. Vladov^{c, ***}

^a*Faculty of Sciences and Humanities, Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russia*

^b*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

*e-mail: krizsky@rambler.ru

**e-mail: alexandr@igemi.troitsk.ru

***e-mail: vladov_ml@mail.ru

Received March 28, 2024; revised July 25, 2024; accepted July 25, 2024.

Abstract — Based on the solution of inverse coefficient problems of direct current geoelectrics in a linear formulation, the method for refining the shape and an algorithm for finding the components of the electrical conductivity tensor of a local inclusion located in a piecewise constant medium are presented. The solution to the inverse problem of direct electric current for a local three-dimensional object characterized by the electrical conductivity tensor is presented. The study was carried out to clarify the shape of an anomalous object of complex geometry. The algorithm for refining the shape of a local anisotropic inclusion is proposed. The analysis of issues related to the application of this procedure was carried out. The results of computational experiments are discussed.

Keywords: inverse coefficient problem of geoelectrics, piecewise constant anisotropic media, form of local inclusion, electrical conductivity tensor