

УДК 539.3;532.685

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КОНФИГУРАЦИОННОЙ МЕХАНИКИ К ЗАДАЧЕ О ФОРМИРОВАНИИ СТИМУЛИРОВАННОГО ОБЪЕМА

© 2025 г. **Ш. А. Мухамедиев¹, О. Я. Извеков^{2, *}**

²Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

¹Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Москва, Россия

*E-mail: izvekov_o@inbox.ru

Поступила в редакцию 07.03.2024 г.

После доработки 09.08.2024 г.

Принята к публикации 26.08.2024 г.

Зона активированных естественных трещин (стимулированный объем) в процессе гидроразрыва пласта в континуальном приближении рассматривается как растущее насыщенное флюидом пористое тело. Варьируя в отсчетной и актуальных конфигурациях состояние тела, содержащего поверхность сильного разрыва, и записывая закон сохранения энергии в виде принципа возможных перемещений, получены условия для скачков физических величин на фронте разрушения. Рассмотрена модельная задача в одномерной постановке, сделана оценка критического давления нагнетания, инициирующего процесс формирования стимулированного объема.

Ключевые слова: пористая среда, фильтрация, гидроразрыв пласта, отсчетная конфигурация, тензор энергии-импульса, принцип возможных перемещений.

DOI: 10.31857/S0002333725030081, **EDN:** FFEVEB

ВВЕДЕНИЕ

Технология гидроразрыва пласта (ГРП) уже несколько десятилетий является важнейшей технологией стимуляции продуктивных пластов. Переход к нетрадиционным месторождениям углеводородов закономерно привел и к модернизации технологии гидроразрыва. Если в классическом варианте в качестве жидкости гидроразрыва используется сшитый гель, что препятствует утечкам в пласт, то в современной модификации технологии применяется вода со сниженной вязкостью, так называемая “скользящая вода” (*slickwater*) [Palisch et al., 2010]. Считается, что при гидроразрыве сланцевых пластов, наоборот, полезно, чтобы жидкость как можно лучше проникла в пласт, при этом происходит развитие новых и активация первоначально закрытых естественных трещин. Развитая система трещин является важнейшим условием продуктивности сланцевых пластов, отличающихся высоким

содержанием углеводородов, но обладающих низкой или сверхнизкой проницаемостью. Созданная в окрестности магистральной трещины гидроразрыва область, охваченная связанной системой трещин, называется “стимулированным объемом” [Warpinski et al., 2009; Cipolla, Wallace, 2014; Umar et al., 2021].

Стимулированный объем учитывается при численных оценках продуктивности горизонтальных скважин с множественным гидроразрывом, например, в виде периодической или непериодической сетки прямолинейных каналов [Wu, 2014]. Параметры стимулированного объема традиционно восстанавливают по микросейсмическим данным, полученным в процессе ГРП. В большинстве моделей (DFN, EDFM и др.) принимается допущение, что микросейсмические события однозначно отображают сеть трещин гидроразрыва [Kanamori, 1977; Li, Lee, 2008; Williams-Stroud et al., 2013]. Предпринимаются попытки дифференцировать

микросейсмические события по некоторым признакам, указывающим на тип источника сигнала [Eyre, van der Baan, 2015], что призвано повысить точность интерпретации. Тем не менее исследования показывают, что результаты таких оценок неоднозначны [Eisner et al., 2010; Umar, 2021; Liu et al., 2022]. С одной стороны, затруднительно точно указать, связаны ли зарегистрированные микросейсмические события с наличием в этой области системы гидродинамически связанных трещин, с другой стороны, система естественных трещин может увеличить проницаемость, при этом не проявляя никакой микросейсмической активности. Таким образом, проблема восстановления картины гидродинамически связанных каналов по микросейсмическим данным еще далека до окончательного решения. Из вышесказанного следует, что актуальной задачей является оценка характеристик стимулированного объема исходя из фундаментальных физических предпосылок.

С проблемой формирования стимулированного объема тесно связаны вопросы распространения трещин ГРП в неоднородных средах (по полю напряжений или механическим свойствам), в том числе в трещиноватой среде, то есть в среде, заранее содержащей залеченные или открытые естественные, или техногенные трещины.

Возможны два основных подхода к данной проблеме: 1) моделирование распространения и взаимодействия индивидуальных трещин, 2) континуальное описание развития ансамбля трещин. Исследованию взаимодействия индивидуальных трещин ГРП с естественными трещинами посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования [Renshaw, Pollard, 1995; Olson 2004; Galybin et al., 2012; 2014; Weng et al., 2011; Wu et al., 2012; Gu et al., 2012]. Отметим, что указанные процессы вполне аналогичны процессам распространения даек [Mukhamediev et al., 2017]. С другой стороны, развитую систему трещин можно описывать в рамках континуального подхода, например, методами механики повреждаемых сред [Lemaitre, 1996; Murakami, 2012]. В этом подходе в систему определяющих параметров включается тензорный или скалярный параметр повреждаемости, характеризующий необратимые изменения в среде при развитии трещин

и других микродефектов, малых по сравнению с элементарным объемом. В работах [Извеков, Кондауров, 2009; 2010; Извеков и др., 2020; 2024] указанный подход применяется для описания рассеянного разрушения в пористой насыщенной среде с хрупким скелетом. Простая континуальная модель развития стимулированного объема представлена в работе [Norris et al., 2015].

В настоящей работе будет рассмотрен частный случай, когда жидкость гидроразрыва со сниженной вязкостью проникает в систему предварительно существующих залеченных естественных трещин, которые делят горную породу на блоки, сами блоки будем считать непроницаемыми. Будем считать, что новые трещины не образуются, а процессы разрушения (активации естественных трещин) сосредоточены в узкой области на границе стимулированного объема (огибающая поверхность, содержащая кончики трещин). Таким образом, становится возможным трактовать стимулированный объем как растущее включение (неоднородность) с энергоемкой сингулярной границей.

История развития механики неоднородностей, границы которых могут двигаться относительно материальных частиц в деформируемых твердых средах, насчитывает более полувека [Maugin, 2013; 2016]. В английском языке для этого раздела механики есть специальный термин “*configurational mechanics*”. По аналогии с силой как производной энергии по перемещению в физическом пространстве Дж. Эшелби [Eshelby, 1951; 1975] предложил рассмотреть силу, действующую на точечную неоднородность (кончик трещины, дислокация и др.) через производную энергии по смещению образа неоднородности в материальном пространстве (отсчетной конфигурации), то есть относительно материальных частиц. Так, введенная величина называется конфигурационной силой. “Конфигурационная механика” позволяет с единых позиций изучать поведение неоднородностей различной природы (дислокации в кристаллах, границы раздела фаз, ударные волны, трещины, любые другие изменения свойств в пространстве). Методами конфигурационной механики исследуют влияние напряжений на фронты химических реакций [Фрейдин, 2015; Freidin et al., 2014], а также наращиваемые биологические ткани [Sharipova et al., 2008; Epstein, 2012; Goda et al., 2016]. Надо

отметить, что многие направления изначально развивались независимо, например, теория фазовых переходов в твердых напряженных телах [Трускиновский, 1983; Кондауров, Никитин, 1982; Кондауров, 2004]. Предложенный в работах по фазовым переходам в твердых телах тензор химического потенциала является родственным понятием тензору энергии-импульса, введенного Дж. Эшелби.

В настоящей работе подходы механики конфигурационных сил обобщаются на случай, когда включение, играющее роль стимулированного объема, представляет собой растущее пористое (трещиноватое) насыщенное флюидом тело. Насыщенное пористое тело трактуется в духе механики сплошной среды в виде двух взаимопроникающих сплошных сред (флюид и скелет), сосуществующих в одном и том же физическом пространстве [Coussy, 2001; Кондауров, 2007]. При этом подразумевается, что элементарный объем многофазной среды должен содержать большое число блоков, ограниченных трещинами. Записывая закон сохранения энергии для деформируемого включения в виде принципа возможных перемещений, выводятся условия на скачки физических величин на сингулярных поверхностях [Мухамедиев, 1990]. В указанной

работе предполагается, что плотности сред по разные стороны сингулярной поверхности в отсчетной конфигурации равны. В настоящей работе мы отказались от этого предположения, так как жидкость, втекающая в пласт извне (например, из скважины или магистральной трещины ГРП), превращается в пористой среде во флюид, плотность которого зависит от пористости скелета и может существенно отличаться от плотности жидкости.

ВАРЬИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ НАРАЩИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС

Рассмотрим блок горной породы, который содержит системы трещин, насыщенных флюидом (рис. 1). Как вещество породы, так и флюид могут изменять свою массу путем присоединения (притока) или утраты (оттока) части ее через поверхность блока. Будем моделировать блок, являющийся системой “твердая матрица (скелет) + флюид”, двухфазной континуальной средой, которая занимает область Ω и в которой каждая из фаз может наращиваться через поверхность $\partial\Omega$. Те участки поверхности $\partial\Omega$, на которых в данный момент времени t_0 происходит массообмен хотя бы одной из фаз, не является

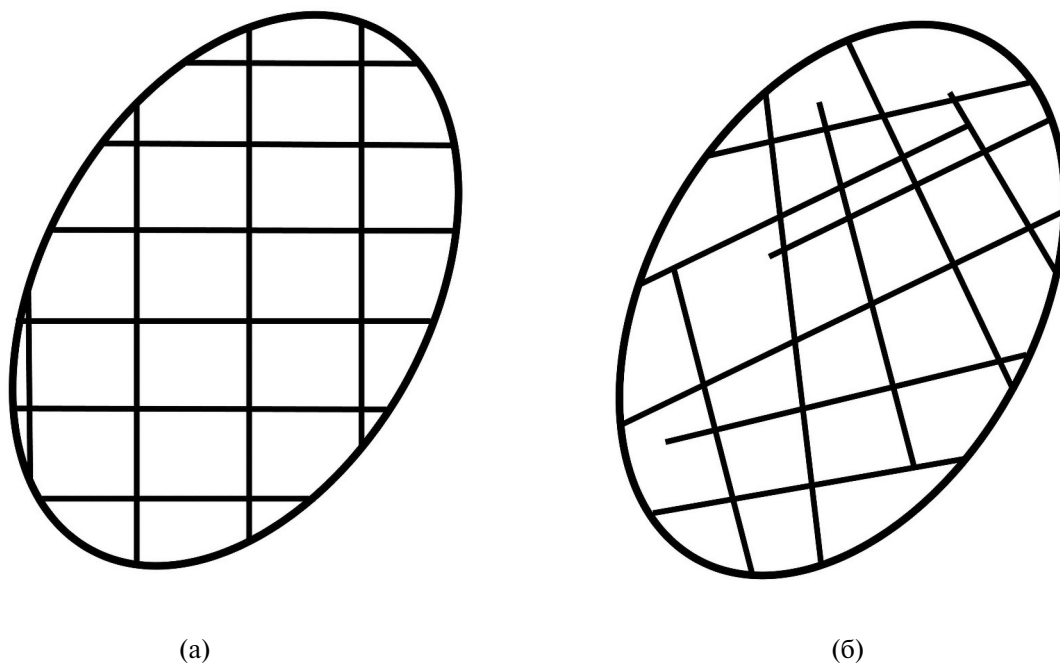


Рис. 1. Объем трещиноватой горной породы, насыщенной флюидом: (а) — регулярная естественная трещиноватость; (б) — хаотичная трещиноватость.

при $t = t_0$ материальной поверхностью для соответствующей фазы.

Балансовые соотношения для Ω и условия на сингулярных (нематериальных) участках поверхности $\partial\Omega$ будем получать, основываясь на подходе автора работ [Мухамедиев, 1990; 1991]. Но в рассматриваемом случае есть ряд усложнений и отличий от упомянутого подхода, на которых будем останавливаться особо.

На рис. 2 показаны отсчетные конфигурации флюида, κ_F , и скелета, κ_S . В работе [Мухамедиев, 1990] они трактуются как области в “материальных” пространствах (дуальных нашему физическому пространству) с границами $\partial\kappa_F$ и $\partial\kappa_S$. Точками этих пространств являются “материальные частицы” флюида, $\mathbf{x}_F^\kappa$, и скелета, $\mathbf{x}_S^\kappa$. В дальнейшем символы $\mathbf{x}_F^\kappa$ и $\mathbf{x}_S^\kappa$, являющиеся координатами в соответствующих материальных пространствах, используются как идентификаторы “частиц” (лагранжевы координаты) при относительном описании движения. Важно отметить, что “материальные частицы”, вводимые нами, не совпадают с истинными физическими частицами флюида и скелета. Они являются воображаемыми частицами тех континуумов, которыми моделируются фазы. Индексы F и S будут иногда заменяться обобщающим индексом $A = F, S$. При варьировании актуального состояния рассматриваемого блока области κ_A превращаются в области $\kappa_A + \delta\kappa_A$, причем приращения $\delta\kappa_A$ малы в том смысле, что их толщины δl_A удовлетворяют неравенству $\delta l_A \approx |\delta\mathbf{x}_A^\kappa \cdot \mathbf{n}_A^\kappa| \ll L_A$, где L_A — характерные линейные размеры областей κ_A ; $\mathbf{n}_A^\kappa = d\mathbf{s}_A^\kappa / |d\mathbf{s}_A^\kappa|$ — единичный вектор

внешней нормали к $\partial\kappa_A$ ($d\mathbf{s}_A^\kappa$ — ориентированный элемент поверхности $\partial\kappa_A$). Те участки поверхности $\partial\kappa_A$, на которых в данный момент времени происходит массообмен, обозначим σ_A^κ ($\sigma_A^\kappa \in \partial\kappa_A$). Важно, что при рассмотрении процесса деформирования, сопровождающегося наращиванием, на каждом этапе актуальной конфигурации χ системы соответствуют новые конфигурации κ_A .

В актуальном состоянии, соответствующем некоторому моменту процесса деформирования, двухфазная среда, моделирующая изучаемый блок, имеет конфигурацию χ и в физическом пространстве занимает область Ω с границей $\partial\Omega = \partial\chi$ (рис. 3а). При моделировании скелета и флюида сплошной средой, их актуальные конфигурации χ_S и χ_F совпадают с χ .

Вариацию актуальной конфигурации $\chi \rightarrow \chi + \delta\chi$ (в силу малости этой вариации) можно представить как суперпозицию двух вариаций (рис. 3). Первая из них, $\chi \rightarrow \chi + \delta\chi$, происходит под воздействием внешних поверхностных усилий $\mathbf{t}_{\partial\chi}^\kappa$ (объемными силами для простоты пренебрегаем) без изменения массы фазовых составляющих (рис. 3б). При этой вариации материальные точки флюида, $\mathbf{x}_F^\kappa$, и скелета, $\mathbf{x}_S^\kappa$, находящиеся на границе $\partial\chi$, смещаются, соответственно, на $\delta'\mathbf{x}_F^\kappa$ и $\delta'\mathbf{x}_S^\kappa$. Заметим, что в системах векторов $\delta'\mathbf{x}_A^\kappa$ может отражаться движение конфигураций χ_A как жестких целых. Работа, произведенная на такой части смещений, не вносит вклада в энергетический баланс, приводимый ниже, вследствие того, что объемными гравитационными силами мы пренебрегаем.

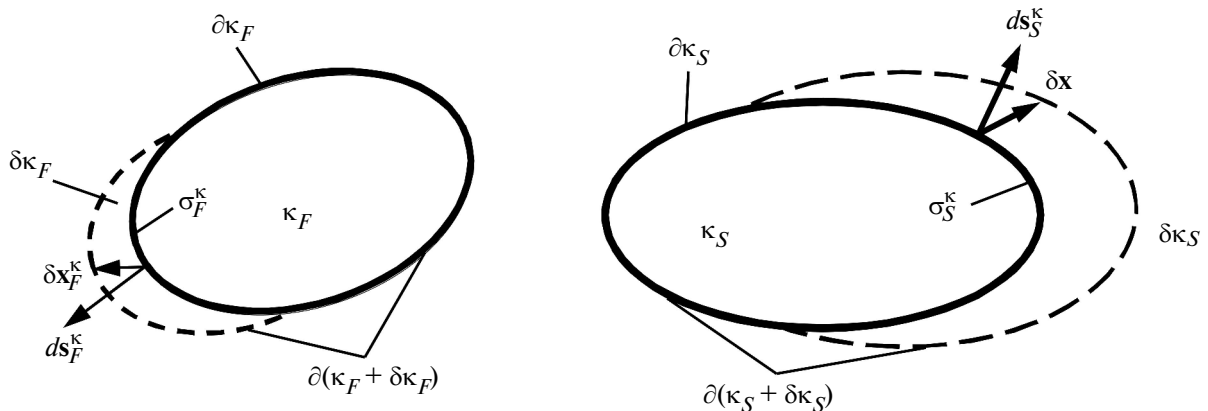


Рис. 2. Отсчетные (материальные) конфигурации флюида, κ_F , и скелета, κ_S , и их малые возмущения $\delta\kappa_F$ и $\delta\kappa_S$ вследствие добавления материала.

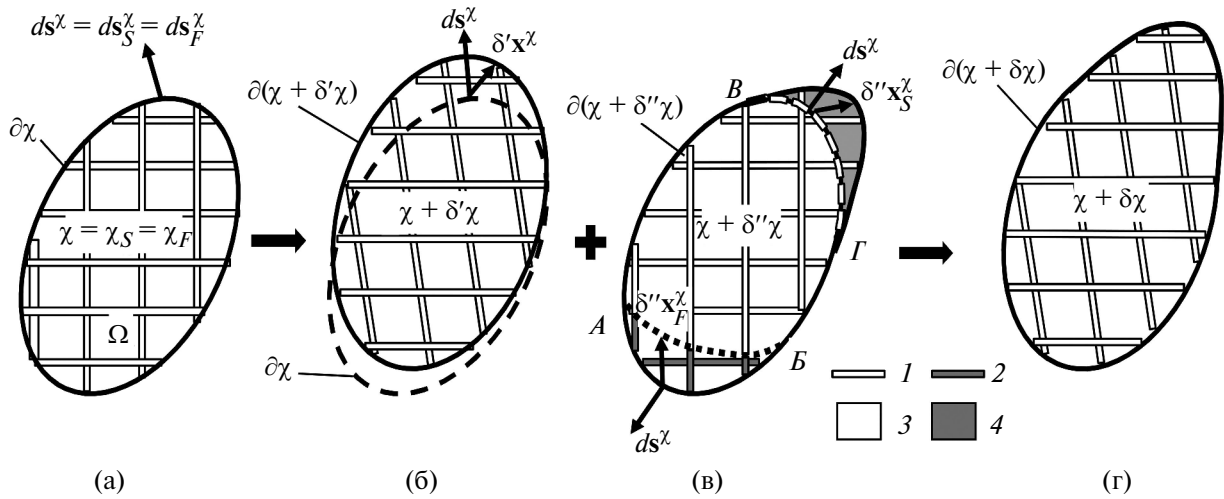


Рис. 3. Варьирование состояния материального объема двухфазной среды, моделирующей изучаемый массив трещиноватой насыщенной горной породы: (а) — актуальная конфигурация χ объема; (б) — вариация χ за счет действия внешних усилий; (в) — вариация χ за счет наращивания масс скелета и флюида; (г) — варьированная конфигурация; 1 — флюид; 2 — добавленный при варьировании объем флюида; 3 — скелет; 4 — добавленный при варьировании объем скелета.

Вторая вариация, $\chi \rightarrow \chi + \delta''\chi$, происходит за счет добавления (или оттока) вещества фаз через поверхности массообмена σ_A^χ ($\sigma_A^\chi \in \partial\chi$) при нулевой работе поверхностных сил на $\partial\chi$ (рис. 3в).

В дальнейшем будем считать, что поверхности σ_A^χ не пересекаются. Также примем, что на σ_F^χ (там, где происходит наращивание флюида) справедливо равенство:

$$ds^\chi \cdot \delta x_F^\chi = ds^\chi \cdot (\delta' x_F^\chi + \delta'' x_F^\chi) = ds^\chi \cdot \delta' x_F^\chi, \quad (1)$$

а на σ_S^χ (там, где происходит наращивание скелета):

$$ds^\chi \cdot \delta x_S^\chi = ds^\chi \cdot (\delta' x_S^\chi + \delta'' x_S^\chi) = ds^\chi \cdot \delta' x_S^\chi. \quad (2)$$

Здесь $ds^\chi = \mathbf{n}^\chi |ds^\chi|$ — ориентированный элемент поверхности $\partial\chi$; $\mathbf{n}^\chi$ — вектор единичной нормали к $\partial\chi$. Равенства (1)–(2) обеспечивают сохранение общей границы составного тела в актуальной конфигурации. Пояснение к (1) и (2) показано на рис. 4 для частного случая одномерного движения вдоль горизонтальной оси. Конфигурации до и после варьирования сдвинуты относительно друг друга по вертикали для читаемости схемы. Черным цветом отмечена жидкость, вошедшая в систему трещин в процессе варьирования, тонкие пунктирные линии обозначают еще не раскрывшиеся трещины.

Тензор полных напряжений Коши $\mathbf{T}^\chi$, реализующийся в гомогенизированной двухфазной среде,

представим в виде суммы “парциальных” тензоров напряжений $\mathbf{T}_A^\chi$ [Coussy, 2001; Кондауров, 2007]:

$$\mathbf{T}^\chi = \mathbf{T}_F^\chi + \mathbf{T}_S^\chi, \quad (3)$$

которые можно интерпретировать как тензоры напряжений в каждой из фаз. Соответственно

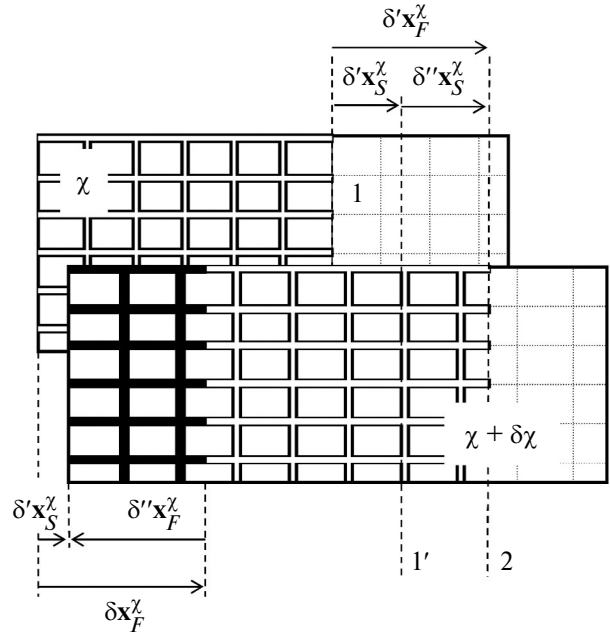


Рис. 4. Варьирование состояния материального объема среды в одномерном случае: 1 — положение фронта разрушения до варьирования; 1' — положение старого фронта после варьирования; 2 — новое положение фронта разрушения после варьирования.

этому, элементарные векторы сил $d\mathbf{f}^\chi = d\mathbf{s}^\chi \cdot \mathbf{T}^\chi$, действующие на поверхности $\partial\chi$, представляются суперпозицией:

$$d\mathbf{f}^\chi = d\mathbf{f}_F^\chi + d\mathbf{f}_S^\chi, \quad d\mathbf{f}_A^\chi = d\mathbf{s}^\chi \cdot \mathbf{T}_A^\chi. \quad (4)$$

Таким образом, работа $\delta'A$, производимая поверхностными силами при $\chi \rightarrow \chi + \delta'\chi$, записывается в виде:

$$\begin{aligned} \delta'A &= \int_{\partial\chi} d\mathbf{f}_F^\chi \cdot \delta'\mathbf{x}_F^\chi + d\mathbf{f}_S^\chi \cdot \delta'\mathbf{x}_S^\chi = \\ &= \int_{\partial\chi} d\mathbf{s}^\chi \cdot (\mathbf{T}_F^\chi \cdot \delta'\mathbf{x}_F^\chi + \mathbf{T}_S^\chi \cdot \delta'\mathbf{x}_S^\chi). \end{aligned} \quad (5)$$

Приращение свободной энергии континуума A в объеме наращиваемого тела Ω без сингулярной границы можно представить в следующем симметричном виде [Мухамедиев, 1991; Chadwik, 1975]:

$$\delta W_A = \int_{\partial\kappa_A} d\mathbf{s}_A^\kappa \cdot \mathbf{T}_A^\kappa \cdot \delta\mathbf{x}_A^\kappa + \int_{\partial\chi} d\mathbf{s}_A^\chi \cdot \mathbf{T}_A^\chi \cdot \delta\mathbf{x}_A^\chi, \quad (6)$$

где: $\mathbf{T}_A^\kappa = w_A^\kappa \mathbf{I} - \mathbf{P}_A \cdot (\nabla_\kappa \otimes \mathbf{x}_A)^T$ — тензор энергии-импульса Эшелби континуума A ; $\mathbf{P}_A$ — несимметричный тензор Пиолы—Кирхгофа континуума A ; w_A^κ — свободная энергия континуума A в единице объема отсчетной конфигурации κ_A ; $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга; “ $\otimes$ ” — знак тензорного умножения. В общем случае под δW_A следует понимать сумму приращения свободной энергии и диссипации в объеме тела. Учет диссипации в объеме скелета позволяет рассматривать скелет произвольной реологии. Массовые силы (силы гравитации и трения между скелетом и флюидом) в (6) не учитываются.

УСЛОВИЯ НА СИНГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассмотрим многофазное тело Ω , в актуальной конфигурации разделенное двумя сингулярными поверхностями σ_1^χ и σ_2^χ на три подтела Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , как показано на рис. 4. Тело Ω_1 содержит только флюида (чистой жидкости), Ω_2 содержит частицы флюида и поврежденного скелета, тело Ω_3 содержит частицы только неповрежденного скелета. Наращивание возможно только на сингулярных поверхностях, на внешней поверхности тела $\delta\Omega_1 \cap \delta\Omega_2 \cap \delta\Omega_3$ наращивания нет. На поверхности σ_2^χ происходит наращивание только скелета (поверхность

области разрушения), на σ_1^χ наращивается только флюид (граница втекания флюида в пористую среду).

Предполагая аддитивность вариации свободной энергии, запишем баланс (6) в виде:

$$\sum_A \delta W_A = \sum_A (\delta W_A^{(1)} + \delta W_A^{(2)} + \delta W_A^{(3)}) + \delta U_\sigma, \quad (7)$$

где: $\sum_A \delta W_A$ — вариация свободной энергии и диссипация в объеме всего тела; $\sum_A \delta W_A^{(i)}$ — вариация свободной энергии и диссипации в объеме подтела Ω_i ; δU_σ — энергетические изменения на сингулярной поверхности σ_2 .

Подставляя для объемных вариаций энергии соотношение (6) в (7), легко видеть, что интегралы по внешней поверхности тела зануляются, остаются лишь интегралы по поверхностям σ_1 и σ_2 .

Предположим, что в актуальной конфигурации на границе втекания флюида полные вариации смещений скелета и флюида равны, что соответствует предположению о непрерывности поля смещения в жидкости при преодолении границы раздела. На фронте разрушения в актуальной конфигурации потребуем равенство только нормальных составляющих вариаций смещений для флюида и скелета, чтобы обеспечить отсутствие перехлестов или раскрытий на границе, касательным смещениям позволим иметь разрыв, чтобы учесть не только когерентные “фазовые переходы”. Тогда с учетом (1) и (2) энергетический баланс (7) примет вид:

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma_1^\chi} d\sigma_1^\chi \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_1} \cdot [\mathbf{T}_F^\kappa \cdot \delta\mathbf{x}_F^\kappa] + \int_{\sigma_1^\chi} d\sigma_1^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_1} \cdot [\mathbf{T}^\chi \cdot \delta\mathbf{x}_F^\chi] + \\ &+ \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\kappa \cdot \delta\mathbf{x}_S^\kappa] + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}^\chi] \times \\ &\times \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \delta_n \chi^\chi + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\chi \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot \delta\mathbf{x}_S^\chi] + \\ &+ \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2+} \cdot \mathbf{T}_F^\chi \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2+} \cdot \delta\mathbf{x}_F^\chi + \delta U_\sigma = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь: $[\chi] = \chi_+ - \chi_-$ — скачок физической величины при переходе через сингулярную поверхность; $\mathbf{n}_{\chi,\kappa}^{\sigma_{1,2}} = \mathbf{n}_{\chi,\kappa}^{\sigma_{1,2}+} = -\mathbf{n}_{\chi,\kappa}^{\sigma_{1,2}-}$ — нормали к сингулярным поверхностям $\sigma_{\chi,\kappa}^{1,2}$ в актуальной и отсчетных конфигурациях; $d\sigma_{\chi,\kappa}^{1,2}$ — элементы

сингулярных поверхностей в актуальной и отсчетной конфигурациях; $\mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} = \mathbf{I} - \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \otimes \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2}$ — проектор на сингулярную поверхность σ_2^χ .

Далее для сокращения записи предположим, что наращивание в отсчетных конфигурациях происходит по нормали $\delta \mathbf{x}_A^\kappa = \delta_n x_A^\kappa \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_{1,2}}$. Учтем закон сохранения массы, тогда должно выполняться условие на вариации нормальных смещений в отсчетной конфигурации $r_F^{\kappa-} \delta \mathbf{x}_F^{\kappa-} \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_{1-}} = r_F^{\kappa+} \delta \mathbf{x}_F^{\kappa+} \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_{1+}}$, где: $r_F^\kappa = \rho_F^\kappa \phi_\kappa$ — плотность флюида; ρ_F^κ — плотность жидкости в начальном состоянии; ϕ_κ — пористость скелета в отсчетной конфигурации (в жидкости вне скелета $\phi_\kappa = 1$). Отличием плотности в отсчетных конфигурациях поврежденного и неповрежденного скелета пренебрежем. Диссипацию энергии на σ_2^κ представим в следующем виде:

$$\delta U_\sigma = \int_{\sigma_2^\kappa} \omega \delta \mathbf{x}_S^\kappa \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} d\sigma_2^\kappa = \int_{\sigma_2^\kappa} \omega \delta_n x_S^\kappa d\sigma_2^\kappa, \quad (9)$$

где: ω — энергозатраты на появление новых поверхностей в единице объема скелета, примыкающего к поверхности s (в остальном объеме при “скользящей воде” необратимые энергозатраты на внутреннее трение равны нулю); $\delta_n x_S^\kappa = \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} \cdot \delta \mathbf{x}_S^\kappa$ — проекция перемещения границы скелета на нормаль к фронту в отсчетной конфигурации.

С учетом выражения (9) на сингулярной поверхности σ_2^χ , а также предполагая непрерывность поля $\delta \mathbf{x}_F^\chi$ на сингулярной поверхности σ_2^χ , из (8) получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_1^\kappa} d\sigma_1^\kappa \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_1} \cdot \left(\mathbf{T}_F^{\kappa+} - \frac{r_F^{\kappa-}}{r_F^{\kappa+}} \mathbf{T}_F^{\kappa-} \right) \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_1} \delta_n x_F^\kappa + \\ & \int_{\sigma_1^\chi} d\sigma_1^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_1} \cdot [\mathbf{T}^\chi] \cdot \delta \mathbf{x}_F^\chi + \\ & + \int_{\sigma_2^\kappa} d\sigma_2^\kappa \left(\mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\kappa] \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} + \omega \right) \delta_n x_S^\kappa \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}^\chi] \cdot \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \delta_n x^\chi + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\chi \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot \delta \mathbf{x}_S^\chi] + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot \mathbf{T}_F^\chi \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot \delta \mathbf{x}_F^\chi = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из произвольности вариаций $\delta \mathbf{x}_F^\chi$ и $\delta_n x_F^\kappa$ на сингулярных поверхностях σ_1^χ и σ_1^κ следуют условия:

$$\mathbf{n}_\kappa^{\sigma_1} \cdot [r_F^\kappa \mathbf{T}_F^\kappa] \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_1} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{n}_\chi^{\sigma_1} \cdot [\mathbf{T}^\chi] = 0. \quad (12)$$

Условие (12) означает непрерывность полных напряжений Коши на поверхности втекания флюида в пористую среду. Учтем (11) и (12) и воспользуемся соотношением

$$[ab] = [a]\langle b \rangle + \langle a \rangle [b], \text{ где } \langle \chi \rangle = \frac{1}{2}(\chi_- + \chi_+). \text{ Соот-}$$

ношение (10) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_2^\kappa} d\sigma_2^\kappa \left(\mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\kappa] \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} + \omega \right) \delta_n x_S^\kappa + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}^\chi] \cdot \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \delta_n x^\chi + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\chi] \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot \langle \delta \mathbf{x}_S^\chi \rangle + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot \langle \mathbf{T}_S^\chi \rangle \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\delta \mathbf{x}_S^\chi] + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot \mathbf{T}_F^\chi \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot \delta \mathbf{x}_F^\chi = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Примем классическое приближение [Coussy, 2001; Кондауров, 2007], когда вязкостью флюида пренебрегается, то есть $\mathbf{T}_F^\chi = -p\phi\mathbf{I}$, где p — давление жидкой фазы. Это приближение справедливо при наличии развитой системы капилляров (в нашем случае трещин), когда обменом импульсом между частицами флюида на масштабе $d\mathbf{x}$ можно пренебречь по сравнению с обменом импульсом между частицами жидкости и скелетом на масштабе отдельных капилляров $\lambda \ll d\mathbf{x}$. В этом случае последний член суммы (13) тождественно равен нулю. Действительно,

$$\mathbf{n}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot \mathbf{T}_F^\chi \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot \delta \mathbf{x}_F^\chi = -p\phi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot (\mathbf{I}_\chi^{\sigma_{2+}} \cdot \delta \mathbf{x}_F^\chi) = 0. \quad (14)$$

Таким образом (13) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_2^\kappa} d\sigma_2^\kappa \left(\mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\kappa] \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} + \omega \right) \delta_n x_S^\kappa + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}^\chi] \cdot \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \delta_n x^\chi + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\chi] \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot \langle \delta \mathbf{x}_S^\chi \rangle + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot \langle \mathbf{T}_S^\chi \rangle \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\delta \mathbf{x}_S^\chi] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из произвольности вариации $\delta_n x^\chi$ следует граничное условие

$$\mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_\chi^\chi] \cdot \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} = 0, \quad (16)$$

означающее непрерывность нормальных полных напряжений Коши на сингулярной поверхности σ_2^χ .

При произвольности вариации $\delta_n x_S^\kappa$ из (15) следует условие:

$$\mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\kappa] \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} + \omega = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим оставшееся выражение:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\chi] \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot \langle \delta \mathbf{x}_S^\chi \rangle + \\ & + \int_{\sigma_2^\chi} d\sigma_2^\chi \mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot \langle \mathbf{T}_S^\chi \rangle \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\delta \mathbf{x}_S^\chi] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Вариацию $\langle \delta \mathbf{x}_S^\chi \rangle$ будем считать произвольной. Существует две возможности. Первая, когда проекция вариации $\delta \mathbf{x}_S^\chi$ на сингулярную поверхность непрерывна (проскальзывания нет). В этом случае получаем условия:

$$\mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\chi] \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\delta \mathbf{x}_S^\chi] = 0. \quad (20)$$

Вторая возможность — когда скачок проекции $\delta \mathbf{x}_S^\chi$ произволен (условие с проскальзыванием). В этом случае справедливо:

$$\mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\chi] \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} = 0, \quad (21)$$

$$\mathbf{n}_\chi^{\sigma_2} \cdot \langle \mathbf{T}_S^\chi \rangle \cdot \mathbf{I}_\chi^{\sigma_2} = 0. \quad (22)$$

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Проиллюстрируем результаты, полученные в предыдущем параграфе, простой одномерной задачей.

Рассматривается слой со стесненной границей (полупространство). Пусть в этом слое существует две зоны, разделенные фронтом разрушения, как показано на рис. 5. Для простоты будем считать зону открытых трещин изотроп-

ной пороупругой средой, зону, где трещины еще не открыты изотропной упругой средой. На левую границу слоя действует нагрузка со стороны жидкости ГРП с давлением p_0 . Силой тяжести пренебрежем.

Пользуясь упругостью среды, предположим существование особого начального состояния, когда отсутствуют полные напряжения, деформации и давление в порах (трещинах). Конфигурацию, соответствующую этому состоянию, будем считать отсчетной для скелета (зона активированных трещин). В области, где трещины еще не активированы, примем начальное состояние, когда деформации и напряжения равны нулю. Положения точек скелета (это относится как к области активированных трещин, так и к неповрежденной области) в отсчетной и актуальной конфигурациях связаны через вектор перемещения

$$\mathbf{x}_S^\chi = \mathbf{x}_S^\kappa + \mathbf{u}. \quad (23)$$

Введем ортонормированный базис $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, направим орт $\mathbf{e}_1$ перпендикулярно границе рассматриваемой области (рис. 6). Из одномерности задачи следует, что перемещения точек скелета будут иметь только одну компоненту по направлению $\mathbf{e}_1$, то есть $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Для краткости обозначим $\mathbf{x}_S^\chi \equiv \mathbf{x} = (x, 0, 0)$, $\mathbf{x}_S^\kappa \equiv \mathbf{X} = (X, 0, 0)$. Пусть координата фронта разрушения $x = \sigma_2(t)$. Градиент деформации и обратный к нему тензор примут вид:

$$\mathbf{F} = \nabla_\kappa \otimes \mathbf{x} = \mathbf{I} + \frac{\partial u}{\partial X} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad (24)$$

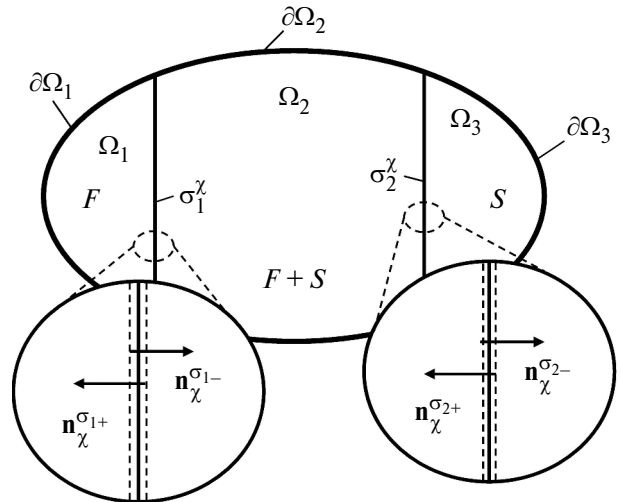


Рис. 5. Составное тело в актуальной конфигурации.

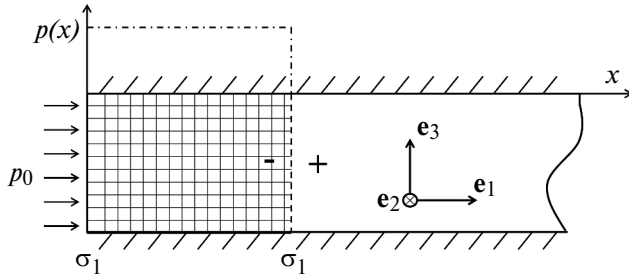


Рис. 6. Постановка одномерной задачи.

$$\mathbf{F}^{-1} = \nabla \otimes \mathbf{X} = \mathbf{I} - \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (25)$$

В приближении малых деформаций скелета с точностью до малых второго порядка справедливо $\partial u / \partial X \approx \partial u / \partial x \equiv \varepsilon$, тогда:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (26)$$

Тензор малой деформации $\mathbf{e}$ принимает вид:

$$\mathbf{e} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \varepsilon \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (27)$$

Тензор полных напряжений $\mathbf{T}$ имеет только три ненулевые компоненты. Уравнение равновесия для полных напряжений дает:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow T_1 = \text{const}. \quad (28)$$

Согласно условию (12) на свободной границе (границе втекания жидкости σ_1^x):

$$T_1 = -p_0. \quad (29)$$

Таким образом, компонента полных напряжений не зависит от координаты и равна $-p_0$. Это справедливо как для зоны раскрытых трещин, так и для еще неповрежденной области. Также это утверждение согласуется с условием (16) на фронте разрушения σ_x^2 .

Линейные определяющие соотношения для полных напряжений и пористости для порупругих сред с изотропным скелетом имеют вид [Кондауров, 2007]:

$$\mathbf{T} = (\lambda_p \mathbf{e} : \mathbf{I} - bp) \mathbf{I} + 2\mu_p \mathbf{e}, \quad (30)$$

$$\phi = \phi_0 + (b - \phi_0) \mathbf{e} : \mathbf{I} + \frac{p}{N}, \quad (31)$$

где: b — коэффициент Био; N — модуль Био; μ_p — коэффициенты Ламе. Коэффициенты Ламе

в (30) снабжены индексом p , чтобы подчеркнуть, что упругие модули скелета в случае активированных и неактивированных трещин могут отличаться.

В рассматриваемом одномерном случае справедливо

$$T_1 = \Lambda_p \varepsilon - bp, \quad (32)$$

где введено обозначение $\Lambda_p = \lambda_p + 2\mu_p$.

Из (32) и (29) следует связь между деформацией и поровым давлением в области активированных трещин:

$$\varepsilon = \frac{-p_0 + bp}{\Lambda_p}. \quad (33)$$

В неповрежденной зоне деформация равна

$$\varepsilon = \frac{-p_0}{\Lambda_0}. \quad (34)$$

В приближении “скользящей воды” при вязкости жидкости стремящейся к нулю, давление жидкости в зоне раскрытых трещин не зависит от координаты и равно внешнему давлению p_0 (график давления показан на рис. 5 штрихпунктирной линией). Тогда деформация скелета также будет константой вплоть до фронта разрушения и согласно (33) равна:

$$\varepsilon_- = \frac{-p_0(1-b)}{\Lambda_p}. \quad (35)$$

Перед фронтом разрушения (в зоне неактивированных трещин) деформация также будет константой, равной:

$$\varepsilon = \frac{-p_0}{\Lambda_0}. \quad (36)$$

Линейное определяющее соотношение (31) для пористости принимает вид:

$$\phi = \phi_0 + (b - \phi_0) \varepsilon_- + \frac{p}{N}. \quad (37)$$

Для простоты пренебрежем объемной долей трещин, когда они закрыты, тогда положим $\phi_0 = 0$. В этом случае (37) упрощается:

$$\phi = \varepsilon + \frac{p}{N}. \quad (38)$$

Обратимся теперь к условию (17) на фронте разрушения. Нормали к площадкам в различных конфигурациях связаны соотношением:

$$\mathbf{n}_\kappa = \frac{dS}{dS_\kappa} J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, \quad (39)$$

где $J \equiv \det \mathbf{F} = dV/dV_\kappa$. В нашем случае отношение площадей элементарных площадок $dS/dS_\kappa = 1$, $J = 1 + \varepsilon$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, таким образом:

$$\mathbf{n}_\kappa = (1 + \varepsilon)^{-1} (1 + \varepsilon) \mathbf{n} = \mathbf{n}. \quad (40)$$

Представим тензор энергии-импульса Эшелби для скелета, входящий в условие на фронте разрушения (17), в терминах актуальной конфигурации:

$$\mathbf{T}_S^\kappa = w_S^\kappa \mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_S \cdot \mathbf{F}^T = J \left(w_S^\kappa \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{T}_S \cdot \mathbf{F}^T \right), \quad (41)$$

где $w_S^\kappa = w_S^\kappa J^{-1}$ — плотность свободной энергии в актуальной конфигурации; $\mathbf{T}_S$ — тензор Коши парциальных напряжений скелета. В (41) использована связь $\mathbf{\Pi}_S = J \mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{T}_S$ [Truesdell, Noll, 2004; Кондауров, Фортон, 2002]. С учетом (26) получим оценку:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{T}_S \cdot \mathbf{F}^T &= (1 - \varepsilon^2) T_{S11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &+ T_{S22} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \approx \mathbf{T}_S. \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда окончательно:

$$\mathbf{T}_S^\kappa \approx (1 + \varepsilon) (w_S^\kappa \mathbf{I} - \mathbf{T}_S). \quad (43)$$

С учетом (43) преобразуем условие (17):

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} \cdot [\mathbf{T}_S^\kappa] \cdot \mathbf{n}_\kappa^{\sigma_2} + \omega &\approx \mathbf{n} \cdot \left[(1 + \varepsilon) (w_S^\kappa \mathbf{I} - \mathbf{T}_S) \right] \cdot \mathbf{n} + \\ &+ \omega = \left[(1 + \varepsilon) (w_S^\kappa - T_{S11}) \right] + \omega = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Представим (44) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} (w_S^{\kappa+} - w_S^{\kappa-}) - (T_{S11}^+ - T_{S11}^-) &+ (\varepsilon^+ w_S^{\kappa+} - \varepsilon^- w_S^{\kappa-}) - \\ - (\varepsilon^+ T_{S11}^+ - \varepsilon^- T_{S11}^-) &+ \omega = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Согласно сделанным допущениям, первый и четвертый члены суммы (45) пропорциональны ε^2 , второй линейен по ε , а третий пропорционален ε^3 . Третьим членом пренебрежем по сравнению с остальными.

$$\begin{aligned} (w_S^{\kappa+} - w_S^{\kappa-}) - (T_{S11}^+ - T_{S11}^-) - \\ - (\varepsilon^+ T_{S11}^+ - \varepsilon^- T_{S11}^-) + \omega = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Оценим выражения в скобках (46). Так как тензор парциальных напряжений в скелете $\mathbf{T}_S = \mathbf{T} + \phi p \mathbf{I}$, а скачок $[T_{11}] = 0$, тогда:

$$[T_{S11}] = [T_{11}] + [\phi p] = -\phi_- p_- = -\phi p_0. \quad (47)$$

Скачок свободной энергии на фронте разрушения равен

$$w_S^{\kappa+} - w_S^{\kappa-} = \frac{1}{2} \Lambda_0 \varepsilon_+^2 - \frac{1}{2} \Lambda_p \varepsilon_-^2 - \frac{1}{2N} p_-^2 - b p_- \varepsilon_-. \quad (48)$$

С точностью до малых второго порядка третий член (47) равен:

$$\varepsilon^- T_{S11}^- - \varepsilon^+ T_{11}^+ \approx -p_0 (\varepsilon^- - \varepsilon^+). \quad (49)$$

Подставляя (47)–(49) в (46), и используя определяющие соотношения для полных напряжений (30) и пористости (38), получим:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1 - b^2}{\Lambda_p} - \frac{1}{\Lambda_0} + \frac{1}{N} \right) p_0^2 + \omega = 0. \quad (50)$$

Так как граница растущего включения энергоемкая, $\omega > 0$ и выражение (50) дает ограничение на параметры модели. Для “обычных” пористых сред (например, песчаник) $b \approx 0.7$, $N \approx 10 \Lambda_0$ [Кондауров, 2007], в этом случае, согласно (50), продвижение фронта разрушения возможно для достаточно узкого диапазона параметров $\Lambda_p > 0.5 \Lambda_0$. Если предположить, что $\Lambda_p \approx \Lambda_0$, что соответствует модели повреждающейся среды [Извеков и др., 2020], из (50) получим оценку для коэффициента Био:

$$b > \sqrt{\frac{\Lambda_p}{N}}. \quad (51)$$

Для среды, поровое пространство которой определяется трещинами, как показано в работе [Извеков и др., 2020], возможна оценка $\Lambda_p/N \sim 10^{-2}$, $b \sim 0.1$. Условие (51) дает $b > 0.1$. Тогда из (50) получается оценка для критического давления:

$$p_0 \sim \sqrt{2\omega M}, \quad (52)$$

где обозначено $M^{-1} = b^2/\Lambda_0 - 1/N$. При меньших давлениях в рамках рассматриваемой одномер-

ной модели распространение фронта разрушения невозможно. Для регулярной сетки трещин, ограничивающих одинаковые кубические блоки, параметр равен $3\gamma/l$, где γ — удельная эффективная поверхностная энергия (Дж/м²), l — расстояние между трещинами (длина ребра блока). Параметр γ входит в критерий разрушения Гриффитса [Griffith, 1921], и согласно обобщению в духе Ирвина—Орована [Партон, Морозов, 2008] включает в себя работу пластической деформации и другие возможные механизмы диссипации вблизи кончика трещины при ее распространении. Параметр γ зависит от минерального состава и строения горной породы и варьируется в широком диапазоне от приблизительно 10^{-2} до 10^2 Дж/м² [Алексеев и др., 1989]. В работе [Snow, 1968] для l приводятся характерные значения 0.2 — 30 м. Из условия, чтобы давление в жидкости превышало минимальное сжимающее напряжение $p_0 > \sigma_{\min}$, получим оценку для параметров скелета:

$$M \sim \sigma_{\min}^2 l / 6\gamma. \quad (53)$$

Для $\gamma = 1$ Дж/м², $l = 0.2$ м, $\sigma_{\min} = 10^7$ Па, $M = 1.7 \cdot 10^{13}$ Па, а при $\gamma = 150$ Дж/м², $l = 0.2$ м, $M = 2 \cdot 10^{10}$ Па.

ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Вопрос континуального описания распространения стимулированного объема рассмотрен в духе конфигурационной механики. Используя предположение, что процессы разрушения сосредоточены в узкой зоне, область активированных флюидом трещин представлена в виде растущего включения с энергоемкой границей. С помощью варьирования состояния составного тела в актуальной и отсчетных конфигурациях, получены граничные условия на сингулярных поверхностях — поверхности втекания флюида и на фронте разрушения. Рассмотрены два случая: 1) на фронте разрушения непрерывна вариация положения частиц скелета (когерентный “фазовый переход”); 2) на фронте разрушения непрерывна только нормальная составляющая вариации положения частиц скелета (условие с проскальзыванием).

Условия на фронте разрушения получены при отсутствии массовой силы трения между скелетом и флюидом. Однако это предположение в общем случае не оправдано, так как вязкость жидкости гидроразрыва хоть и снижена

относительно вязкости воды, но все же не равна нулю. Однако в связи с тем, что условия на обоих фронтах получились независимыми друг от друга, а внешние границы рассматриваемого тела можно мысленно устремить к поверхности фронта, ожидается, что и в случае вязкой жидкости полученные соотношения будут справедливы.

Несмотря на то что в разобранный пример поврежденный скелет считался изотропным пороупругим, полученные условия справедливы для скелета произвольной реологии и анизотропии. В общем случае трещины в системе активируются не только по типу нормального отрыва, но и по типу сдвига, который приводит к дилатансии, что означает появление необратимых деформаций в скелете.

Скажем пару слов о вычислении положения фронта в пространстве. В настоящей работе этот вопрос не рассматривался, но он имеет важность для решения практических задач. В квазистатических задачах механохимии скорость распространения фронта химического превращения в твердом теле связывается с кинетикой химической реакции [Фрейдин, 2015]. Однако при описании распространения ансамбля трещин необходимость учета кинетики процессов в первую очередь возникает в динамическом случае. При высокоинтенсивных динамических нагрузках в материале независимо зарождаются и развиваются микротрещины, что приводит к формированию зоны поврежденного материала, а также к его фрагментации. Как правило, кинетика повреждаемости приводит к тому, что фронты волн разрушения в таких хрупких материалах, как стекло [Kanel et al., 2005; Bauer et al., 2022;] или керамика [Grady, 2017], следуют за ударными волнами с некоторой задержкой. В настоящей работе рассмотрен случай, когда распространение зоны поврежденного материала определяется процессом закачки в него жидкости, то есть характерные времена процесса много больше, чем в динамическом случае. Таким образом, кинетика трещинообразования может считаться мгновенной, а сам процесс формирования и развития стимулированного объема квазистатическим. Следовательно, в каждый момент времени на фронте должны выполняться выведенные условия равновесия, а положение фронта должно быть согласовано

с объемом, закачанной жидкости. Например, в рассмотренном одномерном примере возможна постановка с заданным расходом. При этом в априорно существующей зоне с поврежденным скелетом по мере закачки жидкости давление будет возрастать до предельных значений, определяемых выведенными условиями на фронте. Далее, дополнительные объемы закачиваемой жидкости будут входить в поврежденную зону за счет соответствующего смещения фронта.

В дальнейшем планируется применить полученные результаты для аналитического и численного решения прикладных задач, в том числе исследование формирования стимулированного объема в окрестности трещины гидроразрыва конечной длины, при условии анизотропии напряженного состояния пласта, неупругих и анизотропных свойств среды, нелинейной связи проницаемости и раскрытости трещин.

За рамками исследования остался вопрос о самой возможности формирования стимулированного объема по описанному сценарию. Действительно, рассмотренный сценарий можно назвать диффузионным. Помимо диффузионного, возможен другой сценарий — развитие нескольких крупных трещин сходного масштаба. Здесь уместно упомянуть так называемый кластерный гидроразрыв, когда трещины одновременно инициируются от нескольких интервалов перфорации, которые разнесены друг от друга на расстояние примерно 30–50 метров. Ряд авторов (см. работы [Rateman et al., 2018; Gale et al., 2018]) на основании интерпретации экспериментальных и промысловых данных приходят к выводу, что такой гидроразрыв приводит к формированию пачки длинных субпланарных параллельных трещин, так называемых “роев трещин” (*fracture swarms*).

Ш.А. Мухамедиев является автором идеи и вдохновителем настоящей работы, он предложил метод и составил программу исследования. Работа над выводом условий на границе между неповрежденной средой и областью с трещинами, насыщенными флюидом, начиналась непосредственно под его руководством. К сожалению, увидеть результаты совместной работы Шамилю Ахмедовичу было не суждено.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование поддержано Российским научным фондом (грант №23-21-00175).

БЛАГОДАРНОСТИ

Извеков О.Я. благодарит Фрейдина Б.А. за полезные замечания и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Алексеев А.Д., Ревва В.Н., Рязанцев Н.А. Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений. Киев: Наукова думка. 1989. С. 166.
- Извеков О.Я., Кондауров В.И. О рассеянном разрушении пористых материалов с хрупким скелетом // *Механика твердого тела*. 2010. № 3. С. 182–205.
- Извеков О.Я., Кондауров В.И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом // *Физика Земли*. 2009. № 4. С. 31–42.
- Кондауров В. И. Кинетика фазовых переходов 1-го рода в термоупругом материале // *Докл. РАН*. 2004. Т. 396. № 2. С. 194–198.
- Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. М.: МФТИ. 2007. 310 с.
- Кондауров В.И., Никитин Л.В. О фазовых переходах первого рода в нелинейно-упругих средах // *Докл. АН СССР*. 1982. Т. 262. № 6. С. 1348–1351.
- Кондауров В.И., Фортков В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. М.: МФТИ. 2002. С. 336.
- Мухамедиев Ш.А. Тензоры энергии-импульса и универсальные условия равновесия сингулярных поверхностей // *Изв. АН СССР: Механика твердого тела*. 1990. С. 86.
- Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. URSS. 2008.
- Трускиновский Л.М. О тензоре химического потенциала // *Геохимия*. 1983. № 12. С. 1730–1744.
- Фрейдин А.Б. О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2015. № 3. С. 35–68.
- Barati R., Liang J.T. A review of fracturing fluid systems used for hydraulic fracturing of oil and gas wells // *J. Applied Polymer Science*. 2014. V. 131. № 16.
- Baue S., Butz I., Strassburger E., Sauer M., Hiermaier S. Quantification of Crack Volumes in Dynamically Damaged Soda-Lime Glass // *Glass Struct. Eng.* 2022. P. 1–34.
- Chadwick P. Applications of an energy–momentum tensor in non-linear elastostatics // *Journal of Elasticity*. 1975. Т. 5. № 3–4. P. 249–258.
- Cipolla C., Wallace J. Stimulated reservoir volume: A misapplied concept? SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition. SPE. 2014. P. SPE-168596-MS.
- Cohen C. E. et al. Production Forecast after Hydraulic Fracturing in Naturally Fractured Reservoirs: Coupling a Complex Fracturing Simulator and a Semi-Analytical Production Model. SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition. SPE. 2012. P. SPE-152541-MS.

- Coussy O. Poromechanics. John Wiley & Sons. 2004.
- Eisner L. et al. Beyond the dots in the box: Microseismicity-constrained fracture models for reservoir simulation // The Leading Edge. 2010. V. 29. № 3. P. 326–333.
- Eshelby J.D. The elastic energy–momentum tensor // Journal of elasticity. 1975. V. 5. P. 321–335.
- Eshelby J.D. The force on an elastic singularity // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A // Mathematical and Physical Sciences. 1951. V. 244. № 877. P. 87–112.
- Epstein M. The Elements of Continuum Biomechanics. Wiley. 2012. 392 p.
- Eyre T.S., van der Baan M. Overview of moment-tensor inversion of microseismic events // The Leading Edge. 2015. V. 34. № 8. P. 882–888.
- Freidin A.B., Vilchevskaya E.N., Korolev I.K. Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids // International Journal of Engineering Science. 2014. V. 83. P. 57–75.
- Gale J.F., Elliott S.J., Laubach S.E. Hydraulic fractures in core from stimulated reservoirs: core fracture description of HFTS slant core, Midland Basin, West Texas. In Unconventional Resources Technology Conference, Houston, Texas, 23–25 July 2018 (pp. 1340–1357). Society of Exploration Geophysicists, American Association of Petroleum Geologists, Society of Petroleum Engineers.
- Galybin A.N., Mukhamediev S.A. On modelling of fluid-driven fracture branching in jointed rocks. Proceedings of 19th European conference on fracture, fracture mechanics for durability reliability and safety. Kazan, Russia. 2012. P. 26–31.
- Galybin A.N., Mukhamediev S.A. Fracture development on a weak interface ahead of a fluid-driven crack // Engineering Fracture Mechanics. 2014. V. 129. P. 90–101.
- Goda I., Ganghoffer J.-F. Maurice G. Combined bone internal and external remodeling based on Eshelby stress // International Journal of Solids and Structures. 2016. V. 94–95. P. 138–157.
- Grady D. Physics of Shock and Impact, V. 2. Materials and shock response. IOP Publishing. 2017.
- Griffith A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // Phil. Trans. Roy. Soc. 1921. V. 221. P. 163–198.
- Gu H. et al. Hydraulic fracture crossing natural fracture at nonorthogonal angles: a criterion and its validation // SPE Production & Operations. 2012. V. 27. № 01. P. 20–26.
- Kanamori H. The energy release in great earthquakes // Journal of geophysical research. 1977. V. 82. № 20. P. 2981–2987.
- Kanel G.I., Razorenov S.V., Savinykh A.S., Rajendran A., Chen Z. A Study of the Failure Wave Phenomenon in Glasses Compressed at Different Levels // J. Appl. Phys. 2005. V. 98. № 11.
- Kishore K., Mohanty A.G., Ming Gu. Improvement of Fracturing for Gas Shales // Report for RPSEA (Research Partnership to Secure Energy for America). 2012.
- Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1996. P. 228.
- Li L., Lee S.H. Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media // SPE Reservoir evaluation & engineering. 2008. V. 11. № 04. P. 750–758
- Liu X., Jin Y., Lin B. Classification and evaluation for stimulated reservoir volume (SRV) estimation models using microseismic events based on three typical grid structures // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. V. 211. P. 110169.
- Maugin G.A. Sixty years of configurational mechanics (1950–2010) // Mechanics Research Communications. 2013. V. 50. P. 39–49.
- Maugin G.A. Configurational forces: thermomechanics, physics, mathematics, and numerics. CRC Press. 2016.
- Moinfar A. et al. Development of an efficient embedded discrete fracture model for 3D compositional reservoir simulation in fractured reservoirs // SPE Journal. 2014. V. 19. № 02. C. 289–303.
- Mukhamediev S.A., Galybin A.N., Morozov Y.A. The geometry of a dyke swarm as a result of dyke interaction with each other and with external stresses // Doklady Earth Sciences. Pleiades Publishing. 2017. V. 473. P. 406–410.
- Murakami S. Continuum Damage Mechanics. Springer Netherlands. 2012. P. 402.
- Norris J.Q., Turcotte D.L., Rundle J.B. A damage model for fracking // International Journal of Damage Mechanics. 2015. V. 24. № 8. P. 1227–1238.
- Olson J.E. Predicting fracture swarms—The influence of subcritical crack growth and the crack-tip process zone on joint spacing in rock // Geological Society, London, Special Publications. 2004. V. 231. № 1. P. 73–88.
- Palisch T.T.T., Vincent M.C.C., Handren P.J.J. Slickwater fracturing: food for thought // SPE Production & Operations. 2010. V. 25. № 03. P. 327–344.
- Rateman K.T., Farrell H.E., Mora O.S., Janssen A.L., Gomez G.A., Busetti S., McEwen J., Frieauff K., Rutherford J., Reid R., Jin G., Roy B., Warren M. Sampling a Stimulated Rock Volume: An Eagle Ford Example // SPEReserv. Eval. Eng. V. 21. P. 0927–0941.
- Renshaw C.E., Pollard D.D. An experimentally verified criterion for propagation across unbounded frictional interfaces in brittle, linear elastic materials. International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts. Pergamon. 1995. V. 32. 3. P. 237–249.
- Sharipova L.L., Maugin G.A., Freidin A.B. Modeling the influence of mechanical factors on the growth plate. In Proc. 2nd International Conference on Recent advances in

nonlinear mechanics (Kuala-Lumpur, Malaysia), ed. Jee-Hou Ho, M. Woercigroch and Ko-Choong Woo. 2008. 102–103. Kuala-Lumpur, Malaysia: University Press.

Snow D.T. Rock fracture spacings, openings, and porosities // J. Soil Mech. Found. Div. 1968. V. 94. № 1. P. 73–92.

Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Springer Berlin Heidelberg. 2004. P. 579.

Umar I.A. et al. An outlook into recent advances on estimation of effective stimulated reservoir volume // Journal of Natural Gas Science and Engineering. 2021. V. 88. P. 103822.

Warpinski N.R., Mayerhofer M.J., Vincent M.C., Cipolla C.L., Lolon E.P. Stimulating unconventional reservoirs: maximizing network growth while optimizing

fracture conductivity // J. Canadian Petroleum Technology. 2009. V. 48. № 10. P. 39–51.

Weng X., Kresse O., Cohen C., Wu R., Gu H. Modeling of hydraulic-fracture-network propagation in a naturally fractured formation // SPE Production & Operations. 2011. V. 26. № 4. 368–380.

Wu Y.S., Li J., Ding D., Wang C., Di Y.A. Generalized Framework Model for the Simulation of Gas Production in Unconventional Gas Reservoirs // SPE Journal. 2014. V. 19. № 5. P. 845–857.

Wu R., Kresse O., Weng X., Cohen C.E., Gu H. Modeling of interaction of hydraulic fractures in complex fracture networks. SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition. SPE. 2012. P. SPE-152052-MS.

Application of Configuration Mechanics Methods to the Problem of Stimulated Volume Formation

Sh. A. Mukhamediev^a and O. Ya. Izvekov^{b, *}

^aMoscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

^bSchmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*e-mail: izvekov_o@inbox.ru

Received March 07, 2024; revised August 09, 2024; accepted August 26, 2024

Abstract — The zone of activated natural fractures (stimulated volume) in the process of hydraulic fracturing in the continuum approximation is considered as a growing porous body saturated with fluid. Varying the state of the body containing the surface of a strong fracture in the reference and actual configurations and writing the energy conservation law in the form of the principle of possible displacements, conditions for jumps in physical quantities at the fracture front are obtained. A model problem in a one-dimensional formulation is considered, and an estimate of the critical discharge pressure that initiates the process of the stimulated volume formation is made.

Keywords: porous medium, filtration, hydraulic fracturing, reference configuration, energy-momentum tensor, principle of possible displacements